



Marisa Pedro Silva

Licenciada em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

Impacto do Sistema de *Bonus Malus* na probabilidade de ruína em tempo contínuo e finito

Dissertação para obtenção do Grau de
Mestre em Matemática e Aplicações - Actuariado, Estatística e
Investigação Operacional

Orientadoras: Maria de Lourdes Belchior Afonso,
Professora Auxiliar, FCT-UNL
Gracinda Rita Diogo Guerreiro,
Professora Auxiliar, FCT-UNL

Júri:

Presidente: Manuel Leote Tavares Inglês Esquível, Professor Associado da
FCT-UNL

Arguente: Alfredo Duarte Egídio dos Reis, Professor Catedrático do ISEG-
UL

Vogal: Maria de Lourdes Belchior Afonso, Professora Auxiliar da FCT-
UNL



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro, 2014

Impacto do Sistema de *Bonus Malus* na probabilidade de ruína em tempo contínuo e finito

Copyright © Marisa Pedro Silva, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Ao meu pai

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer à Professora Maria de Lourdes Afonso e à Professora Gracinda Rita Guerreiro pela orientação, ajuda e disponibilidade demonstradas ao longo deste projecto. Para além de toda a paciência, e de todos os conhecimentos transmitidos ao longo destes 2 anos mostraram-me o verdadeiro sentido da palavra amizade entre Professor e Aluno.

Em segundo lugar gostaria de agradecer à Seguradora que me disponibilizou os dados. Sem os mesmos não seria possível concretizar esta dissertação.

Agradeço também aos colegas e à empresa para a qual trabalho, EY (antiga Ernst & Young), por toda a compreensão e flexibilidade transmitidas ao longo deste projecto.

Aos meus colegas de mestrado, um agradecimento por todo o companheirismo, apoio e amizade demonstrados ao longo destes 2 anos. Em especial ao Fábio Pinto por ter sido o meu "parceiro" durante este percurso e por ter-me ajudado e apoiado bastante durante este projecto.

À minha família e amigos que me acompanharam durante toda a minha vida de estudante por todo o apoio, amizade e compreensão ao longo destes anos. Um agradecimento especial à minha mãe por sempre me ter apoiado e ajudado ao longo de toda a minha vida. Sem a sua ajuda, não estaria nem seria o que sou hoje.

Apesar de já não estar presente, também gostaria de fazer um agradecimento muito especial ao meu pai, onde quer que estejas sei que estás orgulhoso de mim.

Às minhas quatro irmãs chatas, um agradecimento especial por estarem sempre presentes, até mesmo nos momentos em que precisava de máxima concentração.

Por último, porém não menos importante, ao meu namorado Gonçalo, por ter permitido que a nossa relação fosse partilhada com um computador ao longo dos últimos três meses. Obrigada também por, apesar de não perceberes muito de matemática, contribuíres para que conseguisse cumprir com o meu objectivo.

Este foi sem dúvida um projecto que, apesar de cansativo, me deu um gozo enorme de participar. Porém, não seria possível concretizar sem o apoio de todas estas pessoas.

Resumo

Nesta dissertação pretende-se verificar o impacto do Sistema de *Bonus Malus* na probabilidade de ruína em tempo contínuo e finito. Para tal, será feita inicialmente uma análise ao Sistema de *Bonus Malus* em vigor numa Seguradora Portuguesa e serão determinadas as escalas óptimas de prémios de Norberg, Borgan et al e Gilde e Sundt, tanto para o modelo clássico, como para o modelo que admite entradas e saídas no Sistema, segundo Guerreiro (2001) e Guerreiro et al. (2014).

Posteriormente será efectuado o cálculo da probabilidade de ruína através do método proposto por Afonso et al. (2009). Este método, para além de ser adaptável a carteiras de grande dimensão, também permite que os prémios sejam variáveis ao longo do tempo, o que se verifica na presença de um Sistema de *Bonus Malus*.

A análise do impacto causado pelo Sistema de *Bonus Malus* na probabilidade de ruína será efectuada através da comparação dos resultados obtidos pelo método referido acima, para os seguintes prémios: prémio puro, escala de prémios proposta pela Seguradora e escalas óptimas de prémios para o Sistema de *Bonus Malus*.

Palavras-chave: Sistema de *Bonus Malus*, Probabilidade de Ruína, Escalas Óptimas de Prémios, Prémio Puro.

Abstract

In this dissertation it is intended to verify the impact of the *Bonus Malus* System in the ruin probability in continuous and finite time. As such, initially an analysis to the *Bonus Malus* System that is currently being used by a Portuguese Insurer will be done and the optimal premium scales proposed by Norberg, Borgan et al and Gilde & Sundt shall be determined, not only for the classic model but also for the model that allows for entries and exits in the System, according to Guerreiro (2001) and Guerreiro et al. (2014).

Afterwards, the calculation for the ruin probability will be done through the method proposed by Afonso et al. (2009). This method, besides being adaptable to large portfolios, also allows for the premiums to vary in time, which happens in the presence of a *Bonus Malus* System.

The analysis of the impact caused by the *Bonus Malus* System in the ruin probability will be done through a comparison of the results obtained by the method referred to above, for the following premiums: pure premium, premium scale proposed by the Insurer and optimal premium scales for the *Bonus Malus* System.

Keywords: *Bonus Malus* System, ruin probability, optimal premium scales, pure premium.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Teoria da Ruína	5
2.1	O modelo de risco em tempo contínuo	6
2.2	Probabilidade de Ruína em tempo contínuo e finito	7
2.2.1	Aproximação à Gama Deslocada	8
2.2.2	Processo de Simulação	10
3	Sistema de <i>Bonus Malus</i>	13
3.1	Definição do Sistema de <i>Bonus Malus</i>	15
3.2	Sistema de <i>Bonus Malus</i> - Carteira Fechada	15
3.2.1	Matriz de Probabilidades de Transição	16
3.2.2	Distribuição Limite	17
3.3	Uma Abordagem para o Sistema de <i>Bonus Malus</i> - Carteira Aberta	17
3.3.1	Matriz de Probabilidades de Transição	18
3.3.2	Modelo de Entradas no Sistema	19
3.3.3	Distribuição Limite	21
3.4	Escalas Óptimas de Prémios	21
3.4.1	Escala de Norberg	22
3.4.2	Escala de Borgan, Hoem e Norberg	24
3.4.3	Escala de Gilde e Sundt	26
4	Análise do Sistema de <i>Bonus Malus</i> e cálculo da probabilidade de ruína	29
4.1	Número de Sinistros	29
4.1.1	O Processo de Poisson Homogéneo	30
4.1.2	O Processo de Poisson Misto	31
4.2	Características do Sistema de <i>Bonus Malus</i> da Seguradora	33
4.3	Sistema de <i>Bonus Malus</i> - Carteira Fechada	35
4.3.1	Distribuição Limite	36

4.3.2	Evolução do Prémio Médio	37
4.3.3	Determinação das Escalas Óptimas	37
4.3.4	Medidas de Eficiência das Escalas Óptimas de Prémios	40
4.4	Sistema de <i>Bonus Malus</i> - Carteira Aberta	41
4.4.1	Probabilidades de Afectação	41
4.4.2	Probabilidades de Anulação	42
4.4.3	Modelo de Entradas	42
4.4.4	Distribuição Limite	43
4.4.5	Evolução do Prémio Médio	45
4.4.6	Determinação das Escalas Óptimas	45
4.4.7	Medidas de Eficiência das Escalas Óptimas de Prémios	52
4.5	Probabilidade de Ruína em tempo contínuo e finito	53
4.5.1	Sistema de <i>Bonus Malus</i> - Carteira Fechada	54
4.5.2	Sistema de <i>Bonus Malus</i> - Carteira Aberta	58
5	Conclusão	63
A	Anexos	69

Lista de Figuras

2.1	Processo da Reserva de Risco	6
4.1	Evolução do Prémio Médio - Carteira Fechada	37
4.2	Ajustamento assintótico às Entradas de Apólices	43
4.3	Evolução do Prémio Médio - Carteira Aberta	45
4.4	Prémios - Carteira Fechada	55
4.5	Probabilidades de Ruína - Carteira Fechada	57
4.6	Prémios - Carteira Aberta	58
4.7	Probabilidades de Ruína - Carteira Aberta	60
A.1	Evolução da Reserva (para um total de 50 simulações das Indemnizações Agregadas) considerando a Escala de Norberg - Carteira Aberta	74
A.2	Evolução da Reserva (para um total de 50 simulações das Indemnizações Agregadas) considerando a Escala de Norberg - Carteira Fechada	74
A.3	Evolução da Reserva (para um total de 50 simulações das Indemnizações Agregadas) considerando a Escala de Gilde - Carteira Aberta	75
A.4	Evolução da Reserva (para um total de 50 simulações das Indemnizações Agregadas) considerando a Escala de Gilde - Carteira Fechada	75
A.5	Evolução da Reserva (para um total de 50 simulações das Indemnizações Agregadas) considerando o Prémio Puro	76

Lista de Tabelas

4.1	Número Observado de Sinistros	30
4.2	Número de Sinistros Observados e Ajustados - Distribuição Poisson	31
4.3	Estimativas de Máxima Verosimilhança - Distribuição Poisson-Gama	33
4.4	Número de Sinistros Observados e Ajustados - Distribuição Poisson-Gama	33
4.5	Classes do Sistema de <i>Bonus Malus</i> da Seguradora XYZ	34
4.6	Vector de prémios da Seguradora XYZ	34
4.7	Distribuição Limite: Carteira Fechada	36
4.8	Escalas Óptimas de Prémios para o Sistema de <i>Bonus Malus</i> - Carteira Fe- chada	38
4.9	Distribuição Estacionária <i>versus</i> Distribuição Ponderada - Sistema de <i>Bo- nus Malus</i> - Carteira Fechada	39
4.10	Medidas de Eficiência das Escalas de Prémios	40
4.11	Probabilidades de Afectação às classes do Sistema	41
4.12	Probabilidades de Anulação para as classes do Sistema	42
4.13	Distribuição Limite: Carteira Aberta	43
4.14	Escalas Óptimas de Prémios para o Sistema de <i>Bonus Malus</i> - Carteira Aberta	46
4.15	Frequência de Sinistralidade Esperada <i>versus</i> Frequência de Sinistralidade Ajustada - Escala de Norberg	47
4.16	Escala de Norberg Ajustada	48
4.17	Distribuição Estacionária <i>versus</i> Distribuição Ponderada - Sistema de <i>Bo- nus Malus</i> - Carteira Aberta	49
4.18	Frequência de Sinistralidade Esperada <i>versus</i> Frequência de Sinistralidade Ajustada - Escala de Borgan, Hoem e Norberg	50
4.19	Escala de Borgan, Hoem e Norberg Ajustada	51
4.20	Escalas Óptimas de Prémios Ajustadas para o Sistema de <i>Bonus Malus</i> - Carteira Aberta	52
4.21	Medidas de Eficiência das Escalas de Prémios	52
4.22	Momentos das Indemnizações Individuais da Seguradora	53

4.23	Probabilidades de ruína em tempo contínuo e finito - Carteira Fechada . .	56
4.24	Probabilidades de ruína em tempo contínuo e finito - Carteira Aberta . . .	59
A.1	Discretização da <i>Distribuição Estrutural</i>	70
A.2	Distribuição das apólices no ano n - Carteira Fechada	71
A.3	Distribuição das apólices no ano n - Carteira Aberta	72
A.4	Probabilidades de ruína em horizonte finito - Carteira Fechada	73
A.5	Probabilidades de ruína em horizonte finito - Carteira Aberta	73



Introdução

A Actividade Seguradora baseia-se fundamentalmente na transferência do risco de um determinado segurado para uma Seguradora. Através da celebração de um contrato de seguro a Seguradora compromete-se a indemnizar o segurado aquando da ocorrência de sinistros, recebendo em troca um montante denominado por prémio de seguro. Contudo, nem sempre o que a Seguradora recebe consegue cobrir as indemnizações que a mesma tem a pagar. Quando tal acontece dizemos que ocorreu ruína, ou seja, o total das indemnizações a pagar foi superior ao total de prémios recebidos.

Constituindo um indicador de estabilidade para a Seguradora, a probabilidade da ruína ocorrer representa uma ferramenta bastante útil para a mesma, uma vez que permite analisar se a Seguradora consegue suportar todas as suas responsabilidades. Regra geral, a estimativa da probabilidade de ruína é calculada para um tempo discreto ou contínuo e com um horizonte temporal finito ou infinito.

De entre os vários métodos propostos na literatura para o cálculo da probabilidade de ruína em tempo contínuo e finito, encontra-se um dos métodos propostos por Afonso (2008) que também pode ser consultado em Afonso et al. (2009). Trata-se de um método de aproximação à probabilidade pretendida, de fácil implementação e adaptável para carteiras de grande dimensão. Este método baseia-se fundamentalmente na simulação das indemnizações agregadas através de uma aproximação à Gama Deslocada.

Se, por um lado, é importante que os prémios que a Seguradora recebe consigam cobrir as indemnizações que a mesma tem de pagar, por outro, também é essencial que esses mesmos prémios sejam justos para os segurados.

Com vista a tornar o prémio mais justo e equitativo para o segurado, é usual, em seguros do Ramo Automóvel, criar-se mecanismos de tarifação *a posteriori* como, por

exemplo, os Sistemas de *Bonus Malus*. Estes Sistemas consistem num mecanismo de tarifação *a posteriori* que visa rever os prémios cobrados aos segurados tendo em conta a sua frequência de sinistralidade passada. Desta forma, os segurados que originam sinistros são penalizados através de um agravamento no seu prémio, ao passo que os segurados que não originam quaisquer sinistros vêm o seu prémio ser bonificado.

O modelo clássico do Sistema de *Bonus Malus* caracteriza-se por um conjunto de classes de desconto e agravamento, regras de transição que definem a classe onde um segurado será colocado em cada anuidade de acordo com a sinistralidade participada, um vector de descontos e agravamentos a aplicar a cada classe e uma classe de entrada pré-definida, onde se considera que são colocados os novos segurados. A sua modelação, de um ponto de vista matemático, é efectuada recorrendo a Cadeias de Markov o que traz, implicitamente, a limitação de não admitir nem entradas nem saídas na carteira de uma Seguradora. Contudo, a realidade da Actividade Seguradora vai contra esta ideologia. De facto, cada vez mais se assiste à transição de segurados entre Seguradoras pelos mais diversos motivos, entre os quais, a procura de prémios mais baixos, e nem sempre o pressuposto de colocação na classe de entrada é respeitado para novos segurados, pelas mais diversas razões.

Guerreiro (2001) e Guerreiro e Mexia (2004) sugerem uma nova abordagem para a modelação de Sistemas de *Bonus Malus*, baseada na teoria dos Vórtices Estocásticos, com vista a ultrapassar os pressupostos impostos pelo modelo clássico. Versões mais recentes desta abordagem estão presentes em Guerreiro e Mexia (2008), Guerreiro et al. (2010) e Guerreiro et al. (2012).

O objectivo desta dissertação consiste em analisar o impacto do Sistema de *Bonus Malus*, de uma determinada Seguradora Portuguesa, na sua probabilidade de ruína em tempo contínuo e finito. Por motivos de confidencialidade dos dados reais da seguradora, foi utilizada uma proporção da sua carteira de Responsabilidade Civil Automóvel.

Inicialmente foi feita uma análise ao Sistema de *Bonus Malus* da Seguradora, tanto para o modelo clássico como para o modelo proposto em Guerreiro (2001) e Guerreiro e Mexia (2004). Foram também calculadas as escalas óptimas de prémios de acordo com os modelos de Norberg (1976), Borgan et al. (1981) e Gilde e Sundt (1989). Por fim, foi efectuada uma análise comparativa da probabilidade de ruína tendo em conta o prémio puro da carteira, a escala de prémios proposta pela Seguradora e a escalas óptimas de prémios determinadas para cada um dos modelos.

Desta forma, a estrutura da dissertação encontra-se dividida em três capítulos.

No primeiro capítulo é feita uma breve abordagem à Teoria da Ruína e ao modelo proposto por Afonso et al. (2009) para o cálculo da probabilidade de ruína em tempo contínuo e finito.

O segundo capítulo encontra-se dividido em três secções. Numa primeira secção são descritas as características subjacentes ao Sistema de *Bonus Malus*, para o modelo clássico. Na segunda secção é apresentado o modelo proposto por Guerreiro (2001) e Guerreiro

e Mexia (2004), bem como os resultados subjacentes ao mesmo. Na última secção são apresentadas três escalas óptimas de prémios, de acordo com Norberg (1976), Borgan et al. (1981) e Gilde e Sundt (1989), como já referido anteriormente.

No último capítulo serão apresentados alguns comentários e conclusões.

Os resultados apresentados neste último capítulo foram obtidos recorrendo ao software Wolfram Mathematica.



Teoria da Ruína

A Teoria da Ruína consiste na análise do capital que uma determinada Seguradora possui ao longo do tempo. Através desta análise é possível, de certa forma, descrever a estabilidade que a Seguradora apresenta. Surgindo no início do Século *XX* através de Lundberg (1903), esta teoria tem vindo cada vez mais a aumentar a sua vasta bibliografia de onde se deve salientar, sobre o modelo clássico de Cramér-Lundberg, Bühlmann (1970) e Gerber (1979). Mais recentemente Asmussen (2000) dedica um livro às probabilidades de ruína.

Admitindo que a Seguradora inicia a sua actividade com um capital positivo e que ao longo do tempo, para além de receber prémios (que se supõem cobrados a uma taxa constante $c > 0$), também paga indemnizações quando ocorrem sinistros, pode definir-se o capital (ou reserva de risco) da Seguradora no momento t , ver por exemplo Lundberg (1903), por

$$U(t) = u + ct - S(t) \quad (2.1)$$

onde $u = U(0)$ representa o capital inicial não negativo, $ct = P(t)$ os prémios recebidos até ao momento t e $S(t)$ as indemnizações pagas até ao mesmo momento t . Este processo de reserva de risco é denominado de modelo clássico de risco.

Neste modelo não são tidos em conta factores como os rendimentos provenientes de investimentos, o pagamento de dividendos, as despesas administrativas ou até mesmo as despesas com a gestão de apólices.

A Figura 2.1 apresenta, como exemplo, uma possível trajectória do processo de reserva de risco descrito em (2.1).

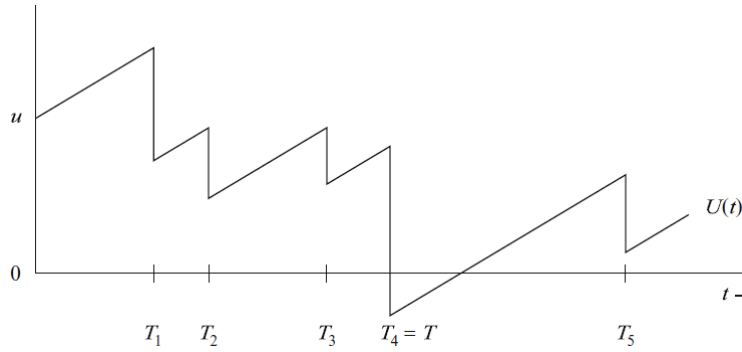


Figura 2.1: Processo da Reserva de Risco

Diz-se que ocorre ruína quando o valor da reserva de risco, num determinado período de tempo, é negativa.

O facto de uma Seguradora atingir a ruína num determinado período de tempo não significa que a mesma tenha entrado em insolvência, uma vez que os prémios não representam a sua única fonte de receitas. Por outro lado, a reserva até pode ser negativa mas, se em termos absolutos, o seu valor for pequeno, é possível que a Seguradora recupere e volte a ter uma reserva positiva.

No entanto, a estimação da probabilidade da ruína ocorrer não deixa de ser uma boa ferramenta de gestão da Seguradora, uma vez que através da mesma é possível verificar se a Seguradora tem capacidades para cobrir as suas responsabilidades. De facto, uma probabilidade de ruína elevada indica alguma instabilidade, pelo que medidas como: cobrança de prémios mais altos, revisão do processo de pagamento das indemnizações, ou ativação/reforço do resseguro, devem ser tomadas.

2.1 O modelo de risco em tempo contínuo

Considere-se o instante de ocorrência de ruína definido da seguinte forma,

$$T = \inf\{t : t \geq 0 \text{ e } U(t) < 0\}, \quad (2.2)$$

sendo que $T = \infty$ se a ruína não ocorrer, ou seja, se $U(t) \geq 0, \forall t > 0$. Desta forma, T representa o tempo de ruína dada uma reserva inicial u . A probabilidade de ruína em tempo finito é dada por:

$$\psi(u, t) = Pr[T < t] = Pr[U(\tau) < 0, \text{ para algum } \tau, 0 < \tau \leq t \mid U(0) = u] \quad (2.3)$$

e a respectiva probabilidade de sobrevivência é representada por:

$$\delta(u, t) = 1 - \psi(u, t). \quad (2.4)$$

O cálculo, exacto ou aproximado, da probabilidade de ruína em horizonte finito é uma tarefa complicada e demorada. Dos algoritmos apresentados para cálculo desta probabilidade destacam-se Seal (1978), De Vylder e Goovaerts (1988) e Dickson e Waters (1991). Na secção seguinte será apresentado um método de cálculo aproximado para o cálculo desta probabilidade.

2.2 Probabilidade de Ruína em tempo contínuo e finito

Ao longo desta secção será abordado um dos métodos propostos em Afonso (2008) para o cálculo da probabilidade de ruína em tempo contínuo e horizonte finito para um Processo de Poisson Composto.

Este método baseia-se na ideologia apresentada por Dickson e Waters (2006), na simulação das indemnizações agregadas e na determinação da reserva e do prémio a cobrar em cada ano, para cálculo aproximado da probabilidade de ruína.

Assim, seguindo Afonso et al. (2009), considere-se o seguinte processo de reserva durante n anos,

$$U(t) = u + \sum_{j=1}^{i-1} P_j + (t - i + 1)P_i - S(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq n \quad (2.5)$$

onde:

- i é tal que $t \in [i - 1, i)$, $i = 1, \dots, n$, e $\sum_{j=1}^0 P_j = 0$
- P_i representa o prémio cobrado no ano i , calculado no início de cada ano, como função das indemnizações agregadas dos anos anteriores.
- $S(t)$ segue um processo de Poisson Composto, com parâmetro λ .

As restantes variáveis têm a mesma designação que na secção anterior.

No que diz respeito aos prémios apenas é conhecido o prémio inicial, P_1 . Para os restantes anos, tanto P_i como $U(i)$ são variáveis aleatórias, uma vez que dependem das indemnizações agregadas dos anos transactos. Designar-se-ão por p_i e u_i as realizações particulares das variáveis aleatórias P_i e $U(i)$.

Para uma melhor compreensão da metodologia apresentada por Dickson e Waters (2006), é necessário definir previamente a seguinte probabilidade de ruína.

Seja $\Delta(u(i-1), 1, y)$, a probabilidade da ruína não ocorrer durante um ano, para uma reserva inicial $u(i-1)$ e uma reserva final superior a y , isto é,

$$\Delta(u(i-1), 1, y) = \int_y^\infty (1 - \psi(u(i-1), 1, z)) f(u(i-1) + p_i - z, 1) dz.$$

Desta forma, a probabilidade de ruína durante um determinado ano i , dadas a reserva inicial e final, $u(i-1)$ e y , respectivamente, é dada por,

$$\psi(u(i-1), 1, y) = 1 + \frac{1}{f(u(i-1) + p_i - y, 1)} \frac{d}{dy} \Delta(u(i-1), 1, y).$$

De acordo com Dickson e Waters (2006), a probabilidade de ruína durante um ano, dadas as reservas inicial e final $u(i-1)$ e $u(i)$, respectivamente, é dada por:

$$\begin{aligned} \psi(u(i-1), 1, u(i)) &= \frac{\int_{s=0}^{1-\frac{u(i)}{p_i}} f(u(i-1) + p_i s, s) \frac{u(i)}{1-s} f(p_i(1-s) - u(i), 1-s) ds}{f(u(i-1) + p_i - u(i), 1)} + \\ &+ \frac{f(u(i-1) + p_i - u(i), 1 - u(i)/p_i) \exp(-\lambda u(i)/p_i)}{f(u(i-1) + p_i - u(i), 1)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde a 1ª parte da expressão representa a probabilidade da ruína ocorrer até ao momento $1 - u(i)/p_i$, tendo em conta que a reserva final é de $u(i)$ e a 2ª parte da expressão representa a probabilidade da ruína ocorrer pela última vez algures em $1 - u(i)/p_i$ e de não ocorrerem sinistros no restante tempo $u(i)/p_i$.

Apesar de se tratar de uma fórmula exacta para calcular $\psi(u(i-1), 1, u(i))$, esta formulação requer valores para a função de densidade das indemnizações agregadas, S , $f(., s)$ para s de 0 a 1. Segundo Afonso et al. (2009), existem fórmulas recursivas que permitem obter estes valores, no entanto, para valores de λ elevados trata-se de um processo moroso.

2.2.1 Aproximação à Gama Deslocada

A aproximação da Gama Deslocada à probabilidade $\psi(u(i-1), 1, u(i))$, proposta por Afonso et al. (2009), consiste em substituir cada função de densidade presente na expressão (2.6), pela função de densidade de uma Gama Deslocada em que os três primeiros momentos são iguais. No que se segue, detalhar-se-á a metodologia seguida.

Considere-se uma variável aleatória, H , com distribuição Gama Deslocada cujos parâmetros são α , β e κ . Estes parâmetros são determinados de tal forma que os três primeiros momentos dessa variável coincidem com os três primeiros momentos das indenizações agregadas, isto é,

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{\alpha}} &= \frac{E[(Y_i - E(Y_i))^3]}{Var(Y_i)^{3/2}} \\ \frac{\alpha}{\beta^2} &= Var(Y_i) \\ \frac{\alpha}{\beta} + \kappa &= E(Y_i)\end{aligned}$$

onde Y_i representa as indenizações agregadas no ano i , isto é, $Y_i = S(i) - S(i-1)$, $i = 1, \dots, n$, e segue uma distribuição de Poisson composta, cujos três primeiros momentos existem.

Seja $\mu'_k = E[X_i^k]$ o momento de ordem k , relativo à origem, da distribuição das indenizações individuais, X_i . Os parâmetros da distribuição da variável H são dados por,

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{4\lambda\mu_2'^3}{\mu_3'^2} \\ \beta &= \frac{2\mu_2'}{\mu_3'} \\ \kappa &= \lambda \left(\mu - \frac{2\mu_2'}{\mu_3'} \right).\end{aligned}$$

Assim sendo, a aproximação à probabilidade pretendida consiste na substituição de cada densidade da distribuição de Poisson Composta presente na expressão (2.6), pela densidade de H .

Sejam $F_G(., s)$ e $f_G(., s)$ a função distribuição e de densidade da variável aleatória H num intervalo de tempo de comprimento s , respectivamente. De acordo com Afonso et al. (2009), a aproximação para a expressão (2.6) é dada por,

$$\begin{aligned}\psi(u(i-1), 1, u(i)) &= \frac{\int_{s=0}^{1-\frac{u(i)}{p_i}} f_G(u(i-1) + p_i s - ks; \alpha s, \beta) \frac{u(i)}{1-s} f_G(p_i(1-s) - u(i) - k(1-s); \alpha(1-s), \beta) ds}{f_G(u(i-1) + p_i - u(i) - k; \alpha, \beta)} + \\ &+ \frac{f_G(u(i-1) + p_i - u(i) - k \left(1 - \frac{u(i)}{p_i}\right); \alpha \left(1 - \frac{u(i)}{p_i}\right), \beta) F_G\left(-k \frac{u(i)}{p_i}; \alpha \frac{u(i)}{p_i}, \beta\right)}{f_G(u(i-1) + p_i - u(i) - k; \alpha, \beta)}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

2.2.2 Processo de Simulação

Para calcular uma estimativa para $\psi(u, n)$ será necessário calcular N trajectórias para o processo de reserva descrito em (2.5), sendo que cada trajectória se inicia no valor da reserva inicial u .

O processo de cálculo de $\psi_j(u, n)$, que representa a estimativa de $\psi(u, n)$ obtida na j -ésima simulação consiste nos seguintes passos:

1. Simular os valores para as indemnizações agregadas anuais, $\{Y_i\}_{i=1}^n$, tendo em conta que Y_i segue uma distribuição Gama Deslocada de parâmetros α , β e k .
2. Calcular os prémios, $\{p_i\}_{i=1}^n$, e as reservas, $\{u_i\}_{i=1}^n$, tendo em conta que

$$u(i) = u(i-1) + p_i - y_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.8)$$

3. Se o valor da reserva para um dado ano i for negativo, então $\psi_j(u, n) = 1$ e inicia-se uma nova simulação. Caso contrário, seguir para o ponto número 4.
4. Calcular $\psi_j(u, n)$ através da seguinte expressão:

$$\psi_j(u, n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \psi(u(i-1), 1, u(i))). \quad (2.9)$$

Tendo em conta que,

- Se $u(i) = u(i-1) + p_i - y_i \geq p_i$ então a ruína não pode ter ocorrido, pelo que $\psi(u(i-1), 1, u(i)) = 0$.
- Se $0 < u(i-1) + p_i - y_i < p_i$ então $\psi(u(i-1), 1, u(i))$ é obtido através da aproximação (2.7).

A estimativa da probabilidade de ruína ao fim de n anos, $\psi(u, n)$ é então dada pela média das N estimativas calculadas, $\{\psi_j(u, n)\}_{j=1}^N$.

A metodologia anteriormente abordada é de fácil aplicação, tendo ainda como mais valia o facto de poder ser utilizada para carteiras de grande dimensão. Apesar de se tratar de uma abordagem de aproximação do cálculo da probabilidade, esta metodologia, conforme referido anteriormente, apresenta bons resultados.

No caso particular desta dissertação o método apresentado por Afonso et al. (2009) torna-se imprescindível para atingir o objectivo proposto, uma vez que, ao considerar que os prémios possam variar de ano para ano, permite-nos avaliar qual o impacto do

Sistema de *Bonus Malus* na probabilidade de ruína de uma determinada Seguradora, em tempo contínuo e finito.

No capítulo seguinte serão apresentados os principais resultados do Sistema de *Bonus Malus* que serão determinantes para o cálculo da probabilidade de ruína pretendida.



Sistema de *Bonus Malus*

O capítulo que se segue será elaborado seguindo como principais fontes Centeno (2003) e Guerreiro (2001).

Ao celebrar um contrato de seguro, a Seguradora assume a cobertura de determinados riscos, comprometendo-se a indemnizar o segurado na eventualidade de ocorrência de sinistro, recebendo em contrapartida um prémio de seguro. Este prémio de seguro deve, por um lado, ser compensador para a Seguradora e, por outro, deve ser justo para o segurado, na medida em que traduz o risco que o mesmo representa para a Seguradora. As características do segurado e do objecto seguro constituem um bom indicador do risco que os mesmos possam representar para a Seguradora.

Nos Seguros de grande dimensão, como é o caso do Seguro Automóvel, verifica-se que vários segurados apresentam características de risco comuns. Assim, ao invés de se determinar o prémio para cada segurado, a Seguradora procura fixar uma tarifa que, ao representar as características do risco de cada apólice, defina o prémio a pagar pela mesma.

No processo de construção de uma tarifa pretende-se distribuir as apólices em classes tão homogéneas quanto possível, de tal forma que os segurados que pertençam à mesma classe paguem o mesmo prémio. Para tal, é necessário identificar factores de risco, que permitam agrupar as apólices nas diferentes classes, através de variáveis observáveis *a priori* (tarifação *a priori*), tais como: a cilindrada, a potência, o ano de registo (no que diz respeito ao automóvel) ou a idade, anos de carta de condução, a profissão (relativamente ao segurado principal), entre outras que se considerem relevantes na mensuração do risco. Apesar do uso de muitas variáveis na tarifação *a priori*, as classes de risco continuam a ser heterogéneas, uma vez que nem todos os factores de risco são considerados

a priori, por não serem mensuráveis ou observáveis. Exemplos desses factores são a rapidez de avaliação e reacção por parte dos condutores em determinadas circunstâncias de perigo, a prudência de condução, etc.

Deste modo, o prémio que é cobrado a um segurado de uma determinada classe de risco poderá não representar o risco que efectivamente o mesmo representa para a Seguradora. Surge assim a necessidade de se proceder a uma revisão do prémio a cobrar (tarifação *a posteriori*).

Com o decorrer do tempo, os factores que não podem ser mensuráveis ou observáveis *a priori*, acabam por se reflectir na experiência do segurado. De acordo com Centeno (2003), vários estudos demonstram que o melhor estimador para o risco do segurado não são as variáveis que são consideradas na tarifação *a priori*, mas sim a sua experiência passada. Deste modo, o processo de tarifação *a posteriori* procura rever o prémio a cobrar a um segurado tendo em conta a sua experiência passada, ao aplicar um agravamento (*malus*) caso o mesmo participe algum sinistro, ou uma bonificação (*bonus*) caso contrário. Nesta formulação, o prémio a cobrar a um determinado segurado passa a ser uma variável aleatória, uma vez que depende da experiência passada do mesmo. De entre os Sistemas de tarifação *a posteriori* encontram-se o "*Experience Rating*", "*No Claim Discount*" e "*Sistemas de Bonus ou de Bonus Malus*".

Alguns dos Sistemas de Tarifação *a posteriori* definem o prémio a pagar por parte de um segurado, tendo em conta também a severidade dos sinistros declarados. No entanto, a generalidade das Seguradoras apenas considera o número de sinistros declarados, facto que traduz a assumpção de independência entre o número de sinistros e a sua severidade.

Segundo Centeno (2003), a introdução deste tipo de Sistemas na sociedade foi alvo de algumas contestações por parte da comunidade actuarial, uma vez que poderia pôr em causa o princípio fundamental da Actividade Seguradora, que consiste no agrupamento de diversos riscos individuais que se supõem mais ou menos homogêneos por forma a que a Seguradora, baseando-se na lei dos grandes números, assuma o conjunto das responsabilidades mediante o pagamento de um prémio.

Ao aplicar um agravamento nos prémios quando se verifica a participação de sinistros, a tarifação *a posteriori* para além de induzir a uma condução mais prudente por parte dos segurados, também leva a que os mesmos deixem de participar alguns sinistros considerados de pequena dimensão. De facto, o agravamento que tais participações podem implicar no prémio pode por vezes ser superior ao custo do próprio sinistro, pelo que acaba por ser mais "vantajoso" para o segurado a não participação do mesmo. Este fenómeno, denominado de "*sede de bonus*", apesar de permitir às Seguradoras uma transferência considerável de sinistros para os segurados, deve ter especial atenção por parte das mesmas, uma vez que estas deixam ter a percepção do risco real que o segurado apresenta.

3.1 Definição do Sistema de *Bonus Malus*

Conforme referido anteriormente, o Sistema de *Bonus Malus* é um Sistema de tarificação *a posteriori* que conduz a uma redução do prémio, em caso de baixa sinistralidade ou a um aumento em caso contrário.

De acordo com Lemaire (1995), o Sistema de *Bonus Malus* apresenta as seguintes características:

- As apólices têm períodos de igual duração, por norma um ano.
- As apólices são divididas por um número finito de classes, C_1, C_2, \dots, C_s , permanecendo nessa mesma classe durante um período.
- A classe em que um segurado é colocado depende apenas da classe a que pertencia e do número de sinistros que participou no período anterior.

O Sistema de *Bonus Malus* encontra-se completamente definido através do trio $S = (\mathbf{b}, C_{i_0}, \mathbf{T})$, onde:

- $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_s)^T$ é a escala de prémios. b_i representa a percentagem de prémio *a priori* da classe C_i , $i = 1, \dots, s$.
- C_{i_0} é a Classe de Entrada, ou seja, a classe onde são colocados todos os novos segurados.
- \mathbf{T} é a matriz de regras de transição do Sistema. Cada célula T_{ij} , $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$, representa o número de sinistros originados durante um período, que origina a transição da classe C_i para a classe C_j no período seguinte.

Da definição do Sistema de *Bonus Malus*, deve-se salientar o facto de apenas ser necessário o conhecimento da classe actual e do número de sinistros participados na última anuidade, para poder determinar a classe do período seguinte, o que nos leva a interpretar matematicamente o Sistema de *Bonus Malus* como uma Cadeia de Markov.

Note-se que existem ainda Sistemas de *Bonus Malus* que, apesar de não satisfazerem esta condição, podem ser interpretados como Cadeias de Markov, através do desdobramento das classes como, por exemplo, no caso do antigo Sistema Português, apresentado e analisado em Centeno (2003) ou do actual Sistema Cabo-Verdiano, descrito e analisado em Rodrigues (2010).

3.2 Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Fechada

Da definição do modelo clássico do Sistema de *Bonus Malus* tem-se o Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Fechada, que tem implícito o facto de não admitir entradas e saídas no

Sistema e considerar que todos os segurados entram na mesma classe do Sistema, a classe C_{i_0} . Nas subsecções seguintes são apresentados alguns dos resultados subjacentes a este modelo. Mais detalhes acerca do mesmo podem ser consultados em Lemaire (1995).

3.2.1 Matriz de Probabilidades de Transição

Como referido anteriormente, a matriz de regras de transição, \mathbf{T} , representa o número de sinistros (declarados) que leva a que os segurados se mantenham na mesma classe ou transitem para uma classe diferente no período seguinte. De acordo com Centeno (2003), as transições t_{ij} podem também ser representadas por transformações de 0 e 1 consoante um dado número de sinistros k permita ou não a transição entre C_i e C_j , respectivamente.

Associada à matriz de regras de transição, encontra-se a matriz de probabilidades de transição que, para uma dada frequência de sinistralidade, nos dá a probabilidade de um segurado que se encontra na classe C_i transitar para a classe C_j no período seguinte. Esta probabilidade, segundo Centeno (2003), é dada por,

$$p_{\mathbf{T},\lambda}(i, j) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) t_{ij}(k) = P_{\lambda}(Z_{S,n+1} = j \mid Z_{S,n} = i), \quad i, j = 1, \dots, s. \quad (3.1)$$

onde $p_k(\lambda)$ representa a probabilidade de um segurado, com frequência de sinistralidade λ , originar k sinistros numa anuidade e $Z_{S,n}$ a classe do Sistema de uma apólice no n -ésimo período, quando vigora o Sistema de *Bonus Malus* $S = (\mathbf{b}, C_{i_0}, \mathbf{T})$.

Naturalmente as probabilidades $p_{\mathbf{T},\lambda}(i, j)$, $i, j = 1, 2, \dots, s$ satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{T},\lambda}(i, j) &\geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \\ \sum_{j=1}^s p_{\mathbf{T},\lambda}(i, j) &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

A matriz $\mathbf{P}_{\mathbf{T},\lambda} = [p_{\mathbf{T},\lambda}(i, j)]_{s \times s}$ representa a matriz de probabilidades de transição num passo da Cadeia de Markov associada ao Sistema de *Bonus Malus*.

A matriz de probabilidades de transição em n passos, designada por $\mathbf{P}_{\mathbf{T},\lambda}^{(n)}$ é, ver por exemplo Centeno (2003), dada por $\mathbf{P}_{\mathbf{T},\lambda}^{(n)} = [p_{\mathbf{T},\lambda}^{(n)}(i, j)]$, onde

$$p_{\mathbf{T},\lambda}^{(n)}(i, j) = P_{\lambda}(Z_{S,k+n} = j \mid Z_{S,k} = i), \quad i, j = 1, \dots, s. \quad (3.2)$$

3.2.2 Distribuição Limite

A distribuição limite, para uma dada frequência de sinistralidade λ , dada por:

$$\pi_{T,\lambda}(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{T,\lambda}^{(n)}(j), \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (3.3)$$

corresponde à distribuição estacionária da Cadeia de Markov que representa o Sistema de *Bonus Malus*, se a mesma for finita, irredutível e aperiódica.

A distribuição estacionária $\Pi_{T,\lambda}$, ver Centeno (2003), é a única solução não negativa do Sistema de equações,

$$\begin{cases} \Pi_{T,\lambda} = \Pi_{T,\lambda} \cdot P_{T,\lambda} \\ \sum_{j=1}^s \pi_{T,\lambda}(j) = 1. \end{cases}$$

$\pi_{T,\lambda}(j)$, $j = 1, 2, \dots, s$ representa, numa perspectiva de longo prazo, para uma apólice de frequência de sinistralidade λ , a probabilidade da mesma se encontrar na classe C_j .

No caso particular desta dissertação, torna-se fundamental, para atingir o objectivo proposto, estimar a distribuição das apólices ao fim dos vários anos. Para tal, a ausência da restrição do limite na expressão (3.3) permite-nos obter a distribuição das apólices pelas classes do Sistema ao fim de n anos, com $n \in \mathbb{N}$.

3.3 Uma Abordagem para o Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Aberta

Da definição do Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Fechada é possível depreender que o mesmo, ao não considerar nem entradas nem saídas na carteira da Seguradora, e ao considerar que todos os segurados entram na mesma classe do Sistema, apresenta alguns inconvenientes, de um ponto de vista prático.

De facto, muitos são os segurados que abandonam as suas Seguradoras pelas mais variadas razões, tais como: aliciamento de outras Seguradoras, descontentamento com os serviços prestados pela Seguradora ou até mesmo para evitar os agravamentos dos prémios. Por outro lado, todos os anos se verifica a entrada de novas apólices na carteira. Estas razões levam a que não seja adequado, de um ponto de vista prático, não considerar entradas e saídas de apólices na carteira.

Para além disso, sabe-se ainda que a Classe de Entrada para cada segurado é obtida através do Certificado de Tarificação, sendo este dependente do número de sinistros participados pela segurado na Seguradora anterior. Desta forma, não é correcto considerar

que todos os segurados entram na mesma classe do Sistema, e que consequentemente, exista apenas uma classe de entrada.

Mexia (1999) apresenta uma formulação inicial da teoria dos Vórtices Estocásticos sendo, em Guerreiro (2001) e Guerreiro e Mexia (2004), apresentada uma reformulação dos Sistemas de Bonus Malus clássicos com base nesta teoria.

Resultados mais recentes relativos a Sistemas de Bonus Malus em carteiras abertas foram ainda publicados em Guerreiro et al. (2013) e Guerreiro et al. (2014).

Definição de Vórtice Estocástico

Considere-se uma população dividida em k sub-populações para a qual são admitidas entradas e saídas. De acordo com Guerreiro (2001) ou Guerreiro e Mexia (2004), estamos perante um vórtice estocástico quando, a longo prazo, apesar das entradas, transições e saídas, a proporção de elementos em cada sub-população se encontra estabilizada.

No presente modelo para o Sistema de *Bonus Malus* a população é representada pela carteira de apólices e as k sub-populações correspondem às s classes do Sistema.

Para além de considerar o vector de saídas do Sistema, este modelo considera ainda um vector de probabilidades de alocação dos segurados, tendo em conta, por isso, que poderão existir saídas da carteira ao longo do tempo, e que nem todos os segurados são inseridos na mesma classe do Sistema.

Desta forma, e de acordo com a definição de vórtice estocástico, apesar de serem consideradas entradas, reclassificações e saídas na carteira de apólices, existe a longo prazo, estabilidade na proporção de segurados pelas diferentes classes do Sistema.

3.3.1 Matriz de Probabilidades de Transição

A Cadeia de Markov passa a ser constituída também por um estado absorvente adicional que representa o estado de saída do Sistema, pelo que cadeia é agora composta por $s + 1$ estados.

Desta forma, a matriz de probabilidades de transição, para o presente modelo, é dada por:

$$\mathbf{P}_{T,\lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{1,\lambda} & \mathbf{q}_{1,\lambda} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

onde

- $\mathbf{K}_{1,\lambda}$ representa a matriz de probabilidades de transição num passo entre as classes.
- $\mathbf{q}_{1,\lambda}$ representa o vector de probabilidades de saída de um segurado, após uma anuidade.

Cada elemento da matriz de probabilidades de transição, $\mathbf{K}_{1,\lambda}$, é dado por:

$$k_{1,\lambda}(i, j) = p_{T,\lambda}(i, j) (1 - q_{1,\lambda}(j)), \quad i, j = 1, \dots, s.$$

uma vez que, após a adição do vector $\mathbf{q}_{1,\lambda}$ na matriz de probabilidades de transição, é necessário assegurar que a soma de cada linha da matriz $\mathbf{P}_{T,\lambda}$ é igual a 1.

A introdução deste vector na matriz de probabilidades de transição faz com que se tenha em consideração o facto de um segurado ou permanecer na carteira, ou abandonar a Seguradora ao fim de uma anuidade.

A matriz de probabilidades de transição em n passos, ver Guerreiro e Mexia (2004), é dada por:

$$\mathbf{P}_{T,\lambda}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{n,\lambda} & \mathbf{q}_{n,\lambda} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

onde

- $\mathbf{q}_{n,\lambda} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{K}_{1,\lambda}^j \mathbf{q}_{1,\lambda}$
- $\mathbf{K}_{n,\lambda} = \mathbf{K}_{1,\lambda}^{(n)}$

3.3.2 Modelo de Entradas no Sistema

A existência da distribuição limite depende do comportamento das entradas na carteira, conforme referido em Guerreiro e Mexia (2008) e, mais recentemente, em Esquivel (2014). Desta forma, é necessário modelar as entradas no Sistema por forma a assegurar a existência de distribuição limite.

De acordo com Guerreiro e Mexia (2004) e Guerreiro et al. (2014), o modelo de ajustamento para o número médio de entradas no Sistema que frequentemente traduz a realidade das Seguradoras, e que garante a existência de distribuição limite, é o modelo de Ajustamento Assintótico. Através deste modelo define-se o número médio de entradas de apólices para o Sistema de acordo com a seguinte expressão,

$$\vartheta_i = \tau \left(1 - e^{-\delta i} \right), \quad \delta > 0, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

onde τ representa o limiar para o número médio de entradas anuais no Sistema. O facto de se introduzir um limiar para o número de entradas de apólices acaba por traduzir a realidade do Mercado Segurador.

Seja $N_i = [N_{i1}, \dots, N_{is}]$ uma amostra de vectores independentes com distribuição Poisson em que N_{ij} representa o número de novas apólices no Sistema que, no ano i , foram alocadas à classe j , com $j = 1, 2, \dots, s$.

Considere-se as seguintes hipóteses,

$$H_0 : \vartheta_{ij} = \tau(1 - e^{-\delta i})c_{ij} \quad \text{vs} \quad H_1 : \exists (i, j) : \vartheta_{ij} \neq \tau(1 - e^{-\delta i})c_{ij}$$

com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, s$. ϑ_{ij} representa, naturalmente, o número médio de entradas no Sistema no ano i alocadas à classe j .

De acordo com Guerreiro et al. (2014), a função de máxima verosimilhança para uma amostra $(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n)$, considerando H_0 , é dada por,

$$\begin{aligned} l_{\Omega_0}(\tau, \delta, c_1, \dots, c_n) &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \log(n_{ij}!) - \sum_{i=1}^n \tau(1 - e^{-\delta i}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n n_{i\bullet} \log[\tau(1 - e^{-\delta i})] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s n_{ij} \log(c_{ij}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^s n_{ij}$ e c_{ij} deve obedecer à restrição $\sum_{j=1}^s c_{ij} = 1$. Derivando a expressão anterior em ordem a τ , δ e c_i e igualando as expressões obtidas a zero é possível obter as seguintes expressões que permitem determinar os estimadores de máxima verosimilhança para τ , δ e c_i , respectivamente, e podem ser consultadas em Guerreiro et al. (2014).

$$\hat{\tau} = \frac{N_{\bullet\bullet}}{\sum_{i=1}^n (1 - e^{-\delta i})} \quad (3.6)$$

$$\hat{\tau} \sum_{i=1}^n i e^{-\delta i} = \sum_{i=1}^n \frac{i e^{-\delta i}}{1 - e^{-\delta i}} \quad (3.7)$$

$$\hat{c}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_{i\bullet}} \quad (3.8)$$

onde $N_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s N_{ij}$ e $N_{i\bullet} = \sum_{j=1}^s N_{ij}$.

Outras formulações para o número médio de entradas de apólices no Sistema podem ser consultadas em Guerreiro et al. (2010), Guerreiro et al. (2012) e ainda em Esquivel (2014).

3.3.3 Distribuição Limite

Segundo Guerreiro et al. (2014), o número esperado de apólices para as diferentes classes do Sistema, numa perspectiva de longo prazo, é dado por:

$$\vartheta_{\infty,\lambda}^{+T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vartheta_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{K}_{T,\lambda}^{n-i} \quad (3.9)$$

onde

- ϑ_i corresponde ao número médio de entradas no ano i (obtido através do modelo estimado de entradas).
- \mathbf{c}_i^T representa a probabilidade de afectação para as diferentes classes do Sistema no ano i .
- $\mathbf{K}_{T,\lambda}^{n-i}$ representa a matriz de probabilidades de transição em $n - i$ passos, entre as classes do Sistema.

Com efeito, o número médio de segurados que entra pela primeira vez na Seguradora, ϑ_i , são classificados segundo o vector \mathbf{c}_i^T , e os segurados já existentes são reclassificados através da matriz $\mathbf{K}_{T,\lambda}^{n-i}$.

A distribuição limite, para uma dada frequência de sinistralidade λ , representa, numa perspectiva de longo prazo, a proporção dos segurados que se encontram nas diferentes classes do Sistema. Como tal, é obtida através da seguinte expressão.

$$\mathbf{\Pi}_{\infty,\lambda} = [\pi_{\infty,\lambda}(j)]_{1 \times s} = \left[\frac{\vartheta_{\infty,\lambda}^{+}(j)}{\sum_{j=1}^s \vartheta_{\infty,\lambda}^{+}(j)} \right]_{1 \times s} \quad (3.10)$$

Tal como referido anteriormente, para atingir o objectivo proposto na dissertação, é necessário determinar a distribuição das apólices pelas classes do Sistema ao longo dos vários anos. Para tal, se não se aplicar o limite presente na expressão (3.9) é possível obter o número esperado de apólices pelas diferentes classes do Sistema, $\vartheta_{n,\lambda}^{+}(j)$, $j = 1, 2, \dots, s$. Para obter a distribuição das apólices pelas classes do Sistema ao fim de n anos, basta apenas substituir $\vartheta_{\infty,\lambda}^{+}(j)$ por $\vartheta_{n,\lambda}^{+}(j)$ na expressão (3.10).

3.4 Escalas Óptimas de Prémios

A determinação de uma escala óptima de prémios, para um dado Sistema de *Bonus Malus*, tem sido alvo de estudo por parte de vários autores ao longo do tempo. Através dos vários modelos, os autores tentam dar resposta a questões como:

- Dadas as regras de transição \mathbf{T} e a classe de entrada C_{i_0} , qual o prémio a cobrar a cada classe do Sistema $S = (\mathbf{b}, C_{i_0}, \mathbf{T})$?
- Qual a eficiência da escala de prémios utilizada pela Seguradora?
- Qual a perda de eficiência que advém da escolha de uma determinada escala de prémios em detrimento de outra?

Pesonen (1963) tenta responder às questões anteriores sugerindo que a cada apólice pertencente a uma determinada classe do Sistema de *Bonus Malus*, fosse cobrado o prémio que representasse o montante de perda esperado da apólice mais antiga dessa mesma classe. Após esta data foram desenvolvidos vários modelos por parte de outros autores.

Ao longo desta secção serão abordados alguns dos métodos sugeridos pelos vários autores, bem como as medidas que nos permitirão decidir qual a melhor escala de prémios.

3.4.1 Escala de Norberg

Norberg (1976) mostra que a escala de prémios proposta por Pesonen é óptima tendo em conta o critério que consiste em minimizar o erro quadrático médio para uma determinada apólice, escolhida aleatoriamente, admitindo que a carteira se encontra no seu estado estacionário. Para tal, Norberg utiliza uma metodologia Bayesiana, com uma abordagem próxima da Teoria da Credibilidade, que se descreverá seguidamente.

Sejam S_n as indemnizações agregadas referentes a uma determinada apólice no n -ésimo período. Para uma determinada frequência de sinistralidade λ considerem-se S_n , $n \in \mathbb{N}$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

O prémio de credibilidade para o período n , baseado em $Z_{S,n}$, ver Norberg (1976), é dado por,

$$\mu_n(Z_{S,n}) = E[E(S_n | \lambda) | Z_{S,n}].$$

Notando que,

$$E[\mu_n(Z_{S,n})] = E[E(S_n | \lambda)] = E[S_n]$$

verifica-se que, em média, os prémios de credibilidade equilibram os montantes agregados de indemnização.

Como medida de eficiência para $b_n(Z_{S,n})$, estimador para o prémio a cobrar, $E(S_n | \lambda)$, utiliza-se o erro quadrático médio, que corresponde à diferença entre o verdadeiro valor do prémio puro e o prémio efectivamente pago no período n ,

$$\begin{aligned}
Q_n(S) &= E [E(S_n | \lambda) - b_n(Z_{S,n})]^2 = \int_0^\infty [E(S_n | \lambda) - b_n(Z_{S,n})]^2 dU(\lambda) = \\
&= \int_0^\infty \sum_{j=1}^s [E(S_n | \lambda) - b_n(Z_{S,n})]^2 p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde, $p_{S,\lambda}^{(n)}(j) = P(Z_{S,n} = j | \lambda)$, representa a probabilidade de um determinado segurado se encontrar na classe j no instante n .

Teorema 3.4.1 Para qualquer $b_n(Z_{S,n})$, baseado em $Z_{S,n}$ tem-se que,

$$Q_n(S) \geq E[\text{Var}[E(S_n | \lambda) | Z_{S,n}]].$$

A igualdade verifica-se se e só se ,

$$P[b_n(Z_{S,n}) = \mu_n(Z_{S,n})] = 1$$

A demonstração do teorema anterior pode ser consultada em Norberg (1976). Através do mesmo fica então demonstrado que $\mu_n(Z_{S,n})$ é o estimador que minimiza (3.11).

A partir do Teorema 3.4.1, verifica-se que a escolha óptima do vector de prémios no período n seria $E[E(S_n | \lambda) | Z_{S,n} = j]$, $j = 1, 2, \dots, s$, que depende de n . No entanto, a aplicação directa deste teorema faz com que se quebre a definição do Sistema de *Bonus Malus*, que nos diz que o vector de prémios a cobrar é independente de n .

De forma a contornar este problema, Norberg propõe que se minimize o valor limite de $Q_n(S)$ quando n tende para ∞ , ou seja $Q_0(S) = E[[E(S | \lambda) - b_T(j)]^2]$, onde S é uma variável aleatória identicamente distribuída a S_n .

Para minimizar $Q_0(S)$, e obter o prémio de credibilidade, basta derivar $Q_0(S)$ em ordem a $b_T(j)$ e igualar a zero a expressão anterior, para $j = 1, 2, \dots, s$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_0(S)}{\partial b_T(j)} = 0 &\Leftrightarrow \int_0^\infty -2E[E(S | \lambda) - b_T(j)] \pi_{T,\lambda}(j) dU(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow b_T(j) = \frac{\int_0^\infty E(S | \lambda) \pi_{T,\lambda}(j) dU(\lambda)}{\pi_T(j)}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

A escala de prémios proposta por Norberg é obtida através de (3.12), sendo por norma designada por $\vec{b}^N = [b^N(j)]$, $j = 1, 2, \dots, s$.

Se se considerar que S_n depende de λ apenas através do número de sinistros, e que a unidade monetária corresponde ao valor esperado de cada indemnização, então a expressão anterior é substituída por,

$$b^N(j) = \frac{\int_0^\infty \lambda \pi_{\mathbf{T},\lambda}(j) dU(\lambda)}{\pi_{\mathbf{T}}(j)}. \quad (3.13)$$

O teorema seguinte permite-nos medir a eficiência associada a esta escala de prémios.

Teorema 3.4.2 *Sejam S e \hat{S} dois Sistemas de Bonus Malus com regras de transição \mathbf{T} e $\hat{\mathbf{T}}$ respectivamente e com escalas de prémios óptimos (calculadas de acordo com (3.12)). \mathbf{T} é mais eficiente que $\hat{\mathbf{T}}$ ($\mathbf{T} \succ \hat{\mathbf{T}}$), ou seja, $Q_0(S) < Q_0(\hat{S})$ se e só se $e(\mathbf{T}) > e(\hat{\mathbf{T}})$, onde*

$$e(\mathbf{T}) = E[b_{\mathbf{T}}^2(Z_{\mathbf{T}})] = \sum_{j=1}^s b_{\mathbf{T}}^2 \pi_{\mathbf{T}}(j). \quad (3.14)$$

A demonstração para este teorema pode ser encontrada em Centeno (2003).

Esta medida de eficiência não tem interpretação por si própria, pelo que deve ser utilizada quando se pretende comparar dois Sistemas de *Bonus Malus*.

Ainda relativamente a este modelo de determinação da escala óptima de prémios há que referir que o mesmo, ao apoiar-se apenas na distribuição estacionária, pode tornar-se por vezes inadequado, uma vez que em determinados Sistemas de *Bonus Malus* a convergência para a estacionaridade pode ser lenta. Para além disso, este mesmo modelo não garante que, estando as classes do Sistema ordenadas de acordo com a propensão à sinistralidade, a ordenação dos prémios esteja de acordo com a mesma.

3.4.2 Escala de Borgan, Hoem e Norberg

Por forma a ultrapassar as críticas apontadas ao modelo de Norberg no que diz respeito ao facto de se basear apenas na distribuição estacionária, Borgan et al. (1981) propõe a introdução de um conjunto de ponderadores não negativos $\{w_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, cuja soma seja a unidade. w_0 representa o peso a atribuir à distribuição estacionária e w_n com $n \in \mathbb{N}$ o peso a atribuir ao período n .

Os autores do modelo propõem duas interpretações para o conjunto dos ponderadores w_n , sendo estas:

- Seja $v = 1/(1+i)$ o factor de desconto com a taxa de juro i . w_n é proporcional a v^{n-1} , ou seja, $w_n = iv^n = w_{n-1}v$. Desta forma a importância atribuída para os diferentes anos diminui com o avanço dos mesmos.
- Definição de uma variável aleatória discreta que repercute a antiguidade de cada apólice na carteira. O conjunto de ponderadores representa a probabilidade de

uma apólice da carteira ter n anos de vigência, assumindo que esta distribuição é independente do ano de calendário.

A escolha do conjunto de ponderadores é de extrema importância se a escala de prémios for sensível a alterações nos mesmos.

Note-se que o modelo anteriormente proposto por Norberg é um caso particular deste modelo. De facto, se se considerar $w_0 = 1$ e $w_n = 0$, para $n \in \mathbb{N}$, obtém-se o modelo de Norberg.

A escala óptima de prémios obtida através deste modelo advém da minimização de,

$$Q(S) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n Q_n(S) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} [E(S_n | \lambda) - b(j)]^2 p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda). \quad (3.15)$$

com $p_{S,\lambda}^{(0)}(j) = \pi_{T,\lambda}(j)$, $j = 1, \dots, s$.

Derivando $Q(S)$ em ordem a $b(j)$ e igualando a zero, obtém-se a seguinte expressão,

$$b^B(j) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} E(S_n | \lambda) p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda)}{p_S(j)}. \quad (3.16)$$

$\mathbf{p}_S = [p_S(j)]_{1 \times s}$ é usualmente designada por distribuição ponderada, sendo obtida a partir de:

$$p_S(j) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda). \quad (3.17)$$

Através do teorema seguinte é possível medir a eficiência subjacente à escala de prémios proposta neste modelo, tornando-se assim numa generalização do Teorema 3.4.2.

Teorema 3.4.3 *Sejam T e \hat{T} dois conjuntos de regras de transição e sejam ainda S e \hat{S} os respectivos Sistemas de Bonus Malus com escalas óptimas de prémios. Então,*

$$Q(S) < Q(\hat{S}) \Leftrightarrow e(T) > e(\hat{T})$$

onde $e(T)$ é agora dado por ,

$$e(T) = \sum_{j=1}^s (b^B(j))^2 p_S(j). \quad (3.18)$$

À semelhança do que foi verificado no modelo de Norberg, este modelo também não garante que, estando as classes do Sistema ordenadas de acordo com a propensão à sinistralidade, a ordenação dos prémios esteja de acordo com a mesma.

3.4.3 Escala de Gilde e Sundt

Gilde e Sundt (1989) propõem um modelo com vista a resolver o problema subjacente nos modelos apresentados anteriormente. Ao linearizar a escala óptima de prémios proposta por um dos modelos anteriores, os autores garantem uma evolução regular dos prémios entre classes e crescente com a propensão à sinistralidade.

Gilde e Sundt (1989) sugerem, assim, uma escala linear, através da minimização de (3.15) introduzindo as seguintes restrições

$$b^G(j) = a + bj, \quad j = 1, \dots, s \quad (3.19)$$

Por forma a minimizar a expressão (3.15), sujeito às restrições definidas em (3.19), comece-se por simplificar a mesma, ver Centeno (2003).

$$\begin{aligned} Q(S) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n Q_n(S) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s [E(S_n | \lambda) - b(j)]^2 p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s E^2(S_n | \lambda) p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) + \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s [b(j)]^2 p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) - \\ &\quad - 2 \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s E(S_n | \lambda) b(j) p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) \end{aligned}$$

Sabendo que, ver novamente Centeno (2003),

- $\sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s E^2(S_n | \lambda) p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} E^2(S_n | \lambda) dU(\lambda)$
- $\sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s [b(j)]^2 p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) = \sum_{j=1}^s [b(j)]^2 p_S(j)$
- $\sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s E(S_n | \lambda) b(j) p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) = \sum_{j=1}^s b(j) b^B(j) p_S(j)$

pode concluir-se que,

$$Q(S) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} E^2(S_n | \lambda) dU(\lambda) + \sum_{j=1}^s [b(j)]^2 p_S(j) - 2 \sum_{j=1}^s b(j) b^B(j) p_S(j). \quad (3.20)$$

Após simplificação da expressão de $Q(S)$, e substituição de (3.19) em (3.20), o objectivo consiste em minimizar,

$$Q(S) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} E^2(S_n | \lambda) dU(\lambda) + \sum_{j=1}^s (a + bj)^2 p_S(j) - 2 \sum_{j=1}^s (a + bj) b^B(j) p_S(j) \quad (3.21)$$

Derivando a expressão anterior em ordem a a e b e igualando a zero obtém-se, ver Centeno (2003),

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial Q(S)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial Q(S)}{\partial b} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sum_{j=1}^s (a + bj) p_s(j) - 2 \sum_{j=1}^s b^B(j) p_s(j) = 0 \\ 2 \sum_{j=1}^s j (a + bj) p_s(j) - 2 \sum_{j=1}^s j b^B(j) p_s(j) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \sum_{j=1}^s b^B(j) p_s(j) - b \sum_{j=1}^s j p_s(j) . \\ b = \frac{\sum_{j=1}^s j b^B(j) p_s(j) - \sum_{j=1}^s j p_s(j) \sum_{j=1}^s b^B(j) p_s(j)}{\sum_{j=1}^s j^2 p_s(j) - (\sum_{j=1}^s j p_s(j))^2} . \end{cases} \end{aligned} \quad (3.22)$$

A escala óptima proposta por Gilde e Sundt é dada pela expressão (3.19), sendo que a e b são obtidos através de (3.22). Como é possível verificar, a diferença entre o prémio de duas classes consecutivas é constante e igual a b .

Gilde e Sundt (1989) propõem ainda que se calcule a medida de perda de eficiência ocorrida da escolha desta escala, em detrimento de uma das outras escalas apresentadas anteriormente, dada através do quociente entre o erro quadrático médio associado às duas escalas.

A utilização tanto da escala de prémios proposta pela Seguradora, \mathbf{b} , bem como das escalas óptimas de prémios sugeridas por Norberg (1976), Borgan et al. (1981) e Gilde e Sundt (1989), no modelo proposto por Afonso et al. (2009), permite-nos verificar o impacto do Sistema de *Bonus Malus* na probabilidade de ruína em tempo contínuo e finito.

No capítulo seguinte é analisado o Sistema de *Bonus Malus* utilizado por uma Seguradora Portuguesa, e é verificado o impacto do mesmo na probabilidade de ruína referida anteriormente.

4

Análise do Sistema de *Bonus Malus* e cálculo da probabilidade de ruína

Ao longo deste capítulo, pretende-se analisar o impacto causado pelo Sistema de *Bonus Malus* de uma dada Seguradora na probabilidade de ruína em tempo contínuo e finito. Para tal, será utilizada uma proporção dos dados relativos à carteira de Responsabilidade Civil Automóvel e o Sistema de *Bonus Malus* de uma Seguradora Portuguesa, adiante denominada por Seguradora XYZ, por questões de confidencialidade.

As regras de transição do Sistema de *Bonus Malus* da Seguradora XYZ apenas têm em consideração o número de sinistros declarados, pelo que se irá modelar o número de sinistros a uma dada distribuição.

Não constitui um objectivo desta dissertação a análise do Sistema de *Bonus Malus* em vigor na Seguradora XYZ, pelo que não foram calculadas medidas de avaliação do Sistema. Uma exposição detalhada das medidas de avaliação para Sistemas de *Bonus Malus* pode ser consultada em Lemaire (1995) ou Centeno (2003).

4.1 Número de Sinistros

A Tabela 4.1 ilustra a distribuição observada do número de sinistros participados à Seguradora XYZ, no ano 2010. Através da sua análise é possível verificar que a distribuição do número de sinistros é assimétrica à direita, visto que muitos são os segurados que não participaram sinistros à Seguradora.

Tabela 4.1: Número Observado de Sinistros

Número de Sinistros	Número de Apólices
0	340.202
1	8.991
2	312
3	18
≥ 4	2
Total	349.525

Nas subsecções seguintes serão apresentadas algumas das distribuições utilizadas para a modelação do número de sinistros.

4.1.1 O Processo de Poisson Homogéneo

O Processo de Poisson é usualmente utilizado para modelar o número de sinistros automóveis.

Seja $N(t)$ uma variável aleatória que representa o número de sinistros, para um determinado risco, ocorridos durante o intervalo de tempo $(0, t]$, com $t \geq 0$ e $N(0) = 0$.

De acordo com Ross (1996), a variável aleatória $N(t)$ segue uma distribuição de Poisson com média λt , para todo $t \geq 0$, ou seja,

$$p_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

se $\{N(t)_{t \geq 0}\}$ for um processo de Poisson, isto é, se satisfazer as seguintes condições:

- $\{N(t)_{t \geq 0}\}$ tem incrementos independentes, ou seja para intervalos disjuntos $(t_i, t_i + h_i)$, $i \in \mathbb{N}$, os incrementos $N(t_i + h_i) - N(t_i)$ são independentes.
- $\{N(t)_{t \geq 0}\}$ tem incrementos estacionários, isto é $N(t + h) - N(t)$ tem distribuição Poisson com parâmetro λt para todo o $t \geq 0$.
- Para intervalos de tempo infinitesimais $(t, t + dt)$, $t \geq 0$, os incrementos $N(t + dt) - N(t)$ verificam as seguintes propriedades:
 - $Pr[N(t + dt) - N(t) = 1 \mid N(s), \quad 0 \leq s \leq t] = \lambda dt$
 - $Pr[N(t + dt) - N(t) = 0 \mid N(s), \quad 0 \leq s \leq t] = 1 - \lambda dt$
 - $Pr[N(t + dt) - N(t) \geq 2 \mid N(s), \quad 0 \leq s \leq t] = 0$

No caso em estudo, o parâmetro λ representa a frequência de sinistralidade de uma apólice, ou seja, o número médio de sinistros ocorridos por unidade de tempo. O valor médio e a variância da distribuição do número de sinistros, para um determinado intervalo de amplitude t , são dados por $E[N(t)] = V[N(t)] = \lambda t$.

Teste ao ajustamento ao Processo de Poisson

Na modelação do número de sinistros ao Processo de Poisson Homogéneo considera-se como unidade de tempo o período de um ano e, portanto $E[N(1)] = \lambda$.

Tendo em conta que o Teste de Qui-Quadrado de Pearson é um teste assintótico, deve-se testar, previamente, se para cada classe do número de sinistros se verifica que o número estimado de sinistros é superior a 5, ou seja, $np_k > 5$, onde n é o número total de apólices e p_k representa a probabilidade de uma apólice ao acaso participar k sinistros. No ajustamento aos dados ilustrados na Tabela 4.1, foi necessário proceder-se ao agrupamento das três últimas classes.

O estimador de máxima verosimilhança para o parâmetro da distribuição, λ , é dado pela média das observações da Tabela 4.1, isto é, $\hat{\lambda} = 0,0277$. Através da aplicação do teste, obtiveram-se os seguintes resultados:

Tabela 4.2: Número de Sinistros Observados e Ajustados - Distribuição Poisson

k	n_k	p_k	np_k
0	340.202	0,97269	339.981
1	8.991	0,02693	9.412,76
≥ 2	332	0,00038	130,301
Total	349.525	1	349.524

O p -value obtido para o teste do Qui-Quadrado é de $3,13704 \times 10^{-71}$, o que se traduz, claramente, na rejeição da hipótese de que o número de sinistros seja proveniente de uma distribuição de Poisson. De facto, a média dos dados representados na Tabela 4.1, $\hat{\mu} = 0,02769$ é inferior à variância dos mesmos, $s^2 = 0,02908$, pelo que seria de suspeitar que os dados relativos ao número de sinistros não seguissem uma distribuição de Poisson.

O processo de Poisson Homogéneo pressupõe que todas as apólices representem o mesmo risco para a Seguradora, o que faz com que o mesmo se revele, em geral, desadequado. De facto, considerar que cada segurado declara, em média, o mesmo número de sinistros, implica que a ocorrência de sinistro acabe por ser fruto do acaso.

4.1.2 O Processo de Poisson Misto

A rejeição do modelo anterior reflecte uma maior variabilidade da frequência de sinistralidade entre os segurados da carteira, fruto do facto de os segurados não declararem, em média, o mesmo número de sinistros, o que indica, como seria de esperar, que a frequência de sinistralidade é distinta entre os segurados da carteira. Desta forma, é necessário identificar um modelo que traduza a heterogeneidade da carteira.

Ao invés do que foi considerado no modelo anterior, considere-se agora que o número de sinistros originado por um segurado escolhido ao acaso segue um processo de Poisson de intensidade λ , em que λ é resultado da observação de uma variável aleatória Λ , não negativa.

No âmbito dos processos de Poisson Mistos, a variável aleatória Λ é designada por *variável de estrutura* e a respectiva função de distribuição,

$$U(\lambda) = P(\Lambda \leq \lambda)$$

é designada por *distribuição de estrutura*. A *distribuição de estrutura* reflecte o grau de heterogeneidade da carteira.

Segundo Ross (1996), num processo de Poisson Misto, a variável aleatória $N(t)$ segue uma distribuição de Poisson Mista, isto é,

$$p_k(t) = Pr[N(t) = k] = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} dU(\lambda) \quad , t \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

O processo de Poisson Misto tem incrementos estacionários. No entanto, ao contrário do processo de Poisson, os incrementos não são independentes. A média e a variância subjacentes a este processo são dadas por

$$\begin{aligned} E[N(t)] &= tE[\Lambda] \\ Var[N(t)] &= tE[\Lambda] + t^2Var[\Lambda] \end{aligned}$$

De entre os processos de Poisson Mistos mais utilizados encontra-se o processo de *Polya*, também designado de processo Poisson-Gama. Este processo é obtido quando a variável aleatória Λ tem distribuição *Gama* (α, β) , ou seja, quando a função de densidade da variável aleatória Λ é dada por:

$$u(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1}, \quad \lambda > 0.$$

que corresponde à distribuição binomial negativa com parâmetros α e $p(t) = \beta/(\beta + t)$.

Neste processo, a média e a variância da *variável de estrutura* são dadas por:

$$\begin{aligned} E[\Lambda] &= \alpha/\beta \\ Var[\Lambda] &= \alpha/\beta^2 \end{aligned}$$

Teste de ajustamento ao Processo de Poisson-Gama

Os estimadores de máxima verosimilhança para os parâmetros da distribuição Poisson-Gama, α e β , são obtidos através das seguintes expressões,

$$\hat{\beta} = \frac{\alpha}{\bar{x}}$$

$$\sum_{k=0}^m n_k \left(\frac{1}{\hat{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{\hat{\alpha} + k - 1} \right) = \sum_{k=0}^m n_k \ln \left(1 + \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}} \right)$$

Para os dados da sinistralidade constantes na Tabela 4.1, as estimativas de máxima verosimilhança obtidas foram as seguintes:

Tabela 4.3: Estimativas de Máxima Verosimilhança - Distribuição Poisson-Gama

Parâmetro	Estimativa de Máxima Verosimilhança
α	0,552459
β	19,9544

Tendo em conta o que foi referido acerca do Teste de Qui-Quadrado de Pearson na subsecção anterior, é necessário agrupar-se as duas últimas classes. Os resultados obtidos através da aplicação deste teste são os seguintes:

Tabela 4.4: Número de Sinistros Observados e Ajustados - Distribuição Poisson-Gama

k	n_k	p_k	np_k
0	340.202	0,97333	340.204
1	8.991	0,02569	8.979,56
2	332	0,00094	327,946
≥ 3	20	0,00004	13,0841
Total	349.525	1	349.524

O p -value obtido é de 0,723831, pelo que não se rejeita a hipótese de que o número de sinistros seja proveniente de uma Distribuição Mista Poisson-Gama.

Desta forma, no que se segue considerar-se-á que o número de sinistros segue uma distribuição de Poisson-Gama com parâmetros α e β , cujas estimativas se encontram na Tabela 4.3.

4.2 Características do Sistema de *Bonus Malus* da Seguradora

Como referido anteriormente, o Sistema de *Bonus Malus* utilizado neste capítulo foi fornecido pela Seguradora XYZ.

Este Sistema contém 23 classes, numeradas por ordem crescente de propensão à sinistralidade, onde 16 classes são de bônus e 6 são de agravamento. A percentagem de desconto ou agravamento atribuída a cada classe encontra-se na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Classes do Sistema de *Bonus Malus* da Seguradora XYZ

Classe	Desconto	Classe	Agravamento
1	50%	17	0%
2	50%	18	10%
3	50%	19	20%
4	50%	20	40%
5	48%	21	60%
6	46%	22	90%
7	44%	23	130%
8	42%		
9	40%		
10	37,5%		
11	35%		
12	32,5%		
13	30%		
14	25%		
15	20%		
16	10%		

Através da Tabela 4.5 é ainda possível identificar a escala comercial do Sistema de *Bonus Malus* da Seguradora, que se encontra na Tabela 4.6.

Tabela 4.6: Vector de prémios da Seguradora XYZ

Classe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$b(j)$	50	50	50	50	52	54	56	58	60	62,5	65	67,5
Classe	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
$b(j)$	70	75	80	90	100	110	120	140	160	190	230	

A Classe 17 constitui a Classe de Entrada no Sistema, a qual se presume que seja a mesma para todos os novos segurados.

Para que o Sistema de *Bonus Malus* esteja completamente caracterizado, é necessário definir as Regras de Transição associadas ao mesmo. As Regras de Transição associadas ao Sistema de *Bonus Malus* da Seguradora XYZ encontram-se representadas na seguinte matriz de probabilidades de transição, $P_{T,\lambda}$.

$$\begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^2 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 1 - \sum_{i=0}^2 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^1 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & p_1 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^1 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 1 - p_0 \\ 0 & p_0 & 1 - p_0 \\ 0 & 1 - p_0 \end{pmatrix}$$

onde p_i representa a probabilidade de uma apólice escolhida ao acaso com frequência de sinistralidade λ , participar i sinistros, ou seja,

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i \in \mathbb{N}_0$$

Tendo em conta que λ é o resultado de uma variável aleatória Λ , com distribuição Gama de parâmetros α e β , a matriz de probabilidades de transição em n passos, $\mathbf{P}_{\mathbf{T}}^{(n)}$, pode ser obtida através de integração das $\mathbf{P}_{\mathbf{T},\lambda}^{(n)}$ em ordem a $U(\lambda)$, ou seja,

$$p_{\mathbf{T}}^{(n)}(i, j) = \int_0^\infty p_{\mathbf{T},\lambda}^{(n)}(i, j) dU(\lambda), \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.1)$$

Ao analisar a Matriz de Probabilidades de Transição é possível verificar que a Cadeia de Markov a si associada é irredutível, visto que todas as classes comunicam entre si.

4.3 Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Fechada

Nesta secção serão apresentados os resultados relativos ao Sistema de *Bonus Malus* da Seguradora XYZ, tendo em conta o modelo de carteira fechada apresentado no capítulo anterior.

4.3.1 Distribuição Limite

Uma vez que a variável aleatória Λ segue uma distribuição Gama de parâmetros α e β , a distribuição limite dada por (3.3) deve ser substituída por

$$\pi_T(j) = Pr[Z_T = j] = \int_0^\infty \pi_{T,\lambda}(j) dU(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.2)$$

Devido a dificuldades computacionais, tornou-se necessário obter uma solução aproximada dos integrais referidos em (4.1) e (4.2). Desta forma, optou-se por efectuar a discretização da *distribuição estrutural* utilizando um método de discretização de arredondamento à unidade mais próxima.

Adaptando assim (4.2) ao caso discreto, ver Centeno (2003), é possível determinar uma aproximação da distribuição limite através de,

$$\pi_T(j) = \sum_{\lambda} \pi_{T,\lambda}(j) u_{\lambda}^d, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.3)$$

onde u_{λ}^d representa o vector das probabilidades da distribuição Gama discretizada para $\lambda \in]0; 0, 5]$, com passo $h = 0, 005$. A escolha do limite de discretização para λ prende-se com o facto de $P(\Lambda \leq 0, 5) = 0, 99999$.

Através de (4.3) é possível obter a distribuição limite assumindo que o modelo não admite nem entradas nem saídas no Sistema. Os resultados obtidos encontram-se representados na Tabela 4.7

Tabela 4.7: Distribuição Limite: Carteira Fechada

Classe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\pi_T(j)$	0,8958	0,0174	0,0183	0,0193	0,0035	0,0038	0,0042	0,0046	0,0050	0,0044	0,0049	0,0041
Classe	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
$\pi_T(j)$	0,0042	0,0033	0,0023	0,0017	0,0010	0,0007	0,0005	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	

A distribuição limite representa a distribuição das apólices da carteira pelas classes do Sistema, a longo prazo. Assim, numa perspetiva de longo prazo, estima-se que cerca de 89,58% das apólices da carteira irão se concentrar na Classe 1, ao passo que apenas 0,20% das apólices estarão na classes de agravamento.

Como seria de esperar, os segurados tendem a concentrar-se nas classes de *bonus* mais elevado. Este facto para além de se dever sobretudo ao facto da frequência de sinistralidade ser demasiado baixa (2,77%), e, como tal, a probabilidade de um segurado não originar qualquer sinistro ser, em média, cerca de 97,27%, também se deve às regras de transição da Seguradora XYZ.

Ao analisar a evolução da distribuição das apólices pelas classes do Sistema ao longo dos anos, foi possível verificar que a carteira apenas atinge a estacionaridade ao fim de 65 anos. Desta forma, as estimativas presentes na Tabela 4.7 apenas deverão ser consideradas após a carteira atingir a estacionaridade.

4.3.2 Evolução do Prémio Médio

A Figura 4.1 representa a evolução do prémio médio de um novo segurado. Este prémio é obtido através da multiplicação da probabilidade de cada segurado se encontrar numa determinada classe, pelo prémio dessa mesma classe, representando desta forma uma percentagem do prémio puro.

O prémio puro representa o prémio definido *a priori*, isto é, o prémio a pagar por parte de um novo segurado.

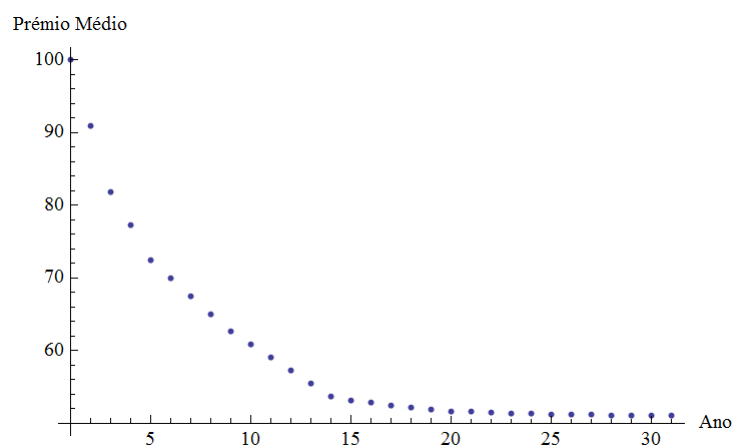


Figura 4.1: Evolução do Prémio Médio - Carteira Fechada

Através da análise da Figura 4.1 é possível afirmar que o prémio médio estacionário da carteira (50,87% do prémio puro) é alcançado por um novo segurado ao fim de cerca de 30 anos.

Como seria de esperar, no início do primeiro ano o prémio médio representa 100% do prémio puro, uma vez que, de acordo com o modelo de carteira fechada do Sistema de *Bonus Malus*, todos os segurados entram na Classe de Entrada do Sistema, que não apresenta quaisquer descontos ou agravamentos e, como tal, cobra 100% do prémio puro.

4.3.3 Determinação das Escalas Óptimas

Nesta subsecção serão apresentados os resultados das escalas óptimas de prémios mencionadas no capítulo anterior, obtidas a partir da formulação proposta pelo modelo para o Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Fechada.

As escalas óptimas de prémios determinadas representam a percentagem do prémio puro a pagar para as diferentes classes do Sistema.

Na determinação das escalas óptimas de prémios considera-se como unidade monetária o valor médio de um sinistro, pelo que o prémio puro é obtido apenas através do valor esperado do número de sinistros.

Na Tabela 4.8 estão apresentadas as diferentes escalas óptimas de prémios.

Tabela 4.8: Escalas Óptimas de Prémios para o Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Fechada

Classes do Sistema	Vector de Prémios Seguradora XYZ	Escala de Norberg	Escala de Borgan et al	Escala de Gilde e Sundt
1	50	13,335	22,681	13,793
2	50	29,059	48,307	19,181
3	50	29,984	50,286	24,569
4	50	30,958	52,595	29,957
5	52	49,722	27,013	35,345
6	54	51,138	28,384	40,733
7	56	52,619	29,733	46,120
8	58	54,171	31,254	51,508
9	60	55,797	32,871	56,896
10	62,5	58,944	33,928	62,284
11	65	60,786	35,636	67,672
12	67,5	65,538	37,001	73,060
13	70	67,477	38,469	78,448
14	75	75,584	39,928	83,836
15	80	85,604	40,631	89,224
16	90	92,187	40,807	94,612
17	100	100,000	100,000	100,000
18	110	111,994	106,659	105,388
19	120	120,845	117,966	110,776
20	140	133,312	170,605	116,164
21	160	143,214	190,119	121,552
22	190	154,535	231,300	126,940
23	230	164,839	258,788	132,328

Comentários à Escala de Norberg

Quando comparada com o vector de prémios utilizado pela Seguradora XYZ, a Escala de Norberg propõe atribuir maiores descontos e menores agravamentos.

No entanto, é necessário ter em conta que esta escala de prémios tem em consideração a estacionaridade da carteira que, no caso da Seguradora XYZ só se verifica ao fim de cerca de 65 anos. Se a Seguradora cobrasse os prémios subjacentes nesta escala, estaria a cobrar prémios tendo em conta a distribuição da sua carteira ao fim de 65 anos, o que em prática poderia não ser o mais sensato, uma vez que não foi disponibilizada qualquer informação por parte da Seguradora que permite aferir se a carteira se encontra já no estado estacionário.

Comentários à Escala de Borgan, Hoem e Norberg

A determinação da Escala de Borgan et al. (1981) pressupõe, ver subsecção 3.4.2, a definição de uma distribuição ponderada baseada num conjunto de ponderadores.

Seguindo a sugestão apresentada em Borgan et al. (1981) optou-se por determinar a distribuição ponderada atribuindo um peso nulo à distribuição estacionária, e pesos decrescentes de ano para ano, durante um horizonte temporal de 20 anos, considerando um factor de desconto para a taxa de juro de 5%. A opção aqui tomada, prende-se essencialmente com falta de informação sobre a carteira para poder construir outro tipo de ponderadores.

A Tabela 4.9 permite-nos identificar as principais diferenças entre a distribuição estacionária e a distribuição ponderada.

Tabela 4.9: Distribuição Estacionária *versus* Distribuição Ponderada - Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Fechada

Classes	Dist. Estacionária	Dist. Ponderada
1	0,895818	0,223930
2	0,017431	0,001988
3	0,018331	0,002609
4	0,019309	0,003363
5	0,003515	0,040137
6	0,003830	0,043511
7	0,004185	0,047120
8	0,004584	0,051155
9	0,005034	0,055540
10	0,004383	0,059200
11	0,004854	0,064205
12	0,004121	0,068635
13	0,004241	0,073440
14	0,003325	0,078436
15	0,002314	0,082100
16	0,001684	0,085310
17	0,001010	0,007575
18	0,000671	0,005820
19	0,000480	0,003686
20	0,000311	0,001055
21	0,000235	0,000650
22	0,000178	0,000311
23	0,000146	0,000214

Como é possível verificar, a distribuição ponderada assume uma maior distribuição dos segurados pelas classes do Sistema. Mas tal como na distribuição estacionária, concentra a maior parte dos segurados nas classes de maior *bonus*.

À semelhança da Escala de Norberg, esta escala também permite atribuir maiores descontos e menores agravamentos nos prémios cobrados aos segurados.

Contudo, ao contrário do que se verifica na Escala de Norberg, esta escala de prémios não tem em consideração a estacionaridade da carteira, uma vez que foi atribuído um peso nulo à distribuição estacionária, deixando que o peso atribuído à estacionaridade seja fruto da evolução da carteira para esse estado.

No que diz respeito ainda a esta escala é necessário referir que, apesar das classes do Sistema estarem ordenadas de acordo com a propensão à sinistralidade dos segurados, a ordenação dos prémios não se encontra coerente com a mesma. Por exemplo, os segurados que se encontram na Classe 2 apesar de, supostamente, se encontrarem numa classe de *bonus* (por representarem menor risco para a seguradora) maior que, por exemplo a Classe 5, têm associada uma percentagem de prémio puro mais elevada que os segurados que se encontrem nesta última classe.

Comentários à Escala de Gilde e Sundt

A Escala de Gilde e Sundt foi obtida através da linearização da Escala de Norberg, uma vez que, como é possível verificar na Tabela 4.10 é a escala que apresenta uma maior medida de eficiência, quando comparada com a Escala de Borgan, Hoem e Norberg. À semelhança das escalas de prémios anteriores, esta escala também permite que sejam cobrados menores descontos e agravamentos.

As três escalas ótimas de prémios sugerem um prémio demasiado baixo para os segurados da Classe 1, onde se estima que estejam cerca de 90% dos segurados, o que, para além de poder ser desadequado de um ponto de vista comercial, pode também causar um grande impacto na probabilidade de ruína.

Desta forma, a escolha da escala ótima de prémios para o Sistema de *Bonus Malus* da Seguradora XYZ, para além de ter em conta a eficiência de cada escala, também tem em conta o seu impacto causado na probabilidade de ruína.

4.3.4 Medidas de Eficiência das Escalas Ótimas de Prémios

A Tabela 4.10 ilustra as medidas de eficiência associadas a cada uma das escalas de prémios determinadas anteriormente.

Tabela 4.10: Medidas de Eficiência das Escalas de Prémios

	Escala de Norberg	Escala de Borgan et al.	Escala de Gilde e Sundt
e(T)	0,00125999	0,000956083	0,00124358

De entre as escalas de prémios que apresentam uma maior eficiência encontram-se a Escala de Norberg e a Escala de Gilde e Sundt.

A perda de eficiência ocorrida por escolher a Escala de Gilde e Sundt em detrimento da Escala de Norberg é de 0,986977. Uma vez que este valor se encontra muito próximo de 1, a perda de eficiência não é significativa, pelo que podemos introduzir as restrições da Escala de Gilde sem que tal se traduza numa redução da qualidade das estimativas.

4.4 Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Aberta

Nesta secção serão apresentados os resultados relativos ao Sistema de *Bonus Malus* da Seguradora XYZ, tendo em conta a abordagem para o modelo de carteira aberta mencionada no capítulo anterior.

4.4.1 Probabilidades de Afectação

O vector \mathbf{c} , que representa as probabilidades de um novo segurado ser colocado em cada uma das classes do Sistema, foi obtido de acordo com a informação fornecida pela Seguradora XYZ, para o ano 2010. Uma vez que apenas foram fornecidos os dados relativos a 2010, as probabilidades de afectação foram calculadas tendo em conta o número de entradas para cada uma das classes nesse mesmo ano e considerou-se que nos restantes anos a distribuição seria semelhante.

Desta forma, ao contrário do que é sugerido no modelo aberto, considerou-se um vector de alocação constante \mathbf{c} .

Tabela 4.11: Probabilidades de Afectação às classes do Sistema

Classe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$c(j)$	0,2781	0	0	0,0009	0	0,0252	0,0300	0,0391	0,0578	0,0361	0,0488	0,0357
Classe	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
$c(j)$	0,0261	0,0291	0,0275	0,0673	0,2959	0,0007	0,0015	0,0001	0,0001	$1,52 \times 10^{-5}$	$4,55 \times 10^{-5}$	

Como se pode verificar através da Tabela 4.11, apesar da Classe 17 representar a classe onde, por norma, são colocados os novos segurados, apenas apresenta uma percentagem de alocação de 29,59%.

A apresentação do Certificado de Tarificação, por parte de um segurado com um bom historial de sinistralidade, aquando da contratação do Seguro de Automóvel, pode fazer com que o mesmo consiga ser colocado na classe de maior *bonus*. Por outro lado, a não apresentação do Certificado de Tarificação de um segurado com um mau historial de sinistralidade faz com que o mesmo seja colocado noutras classes do Sistema, que não as classes de agravamento.

Com efeito, como se pode também verificar através da Tabela 4.11, grande parte dos segurados (cerca de 27,81%) são colocados directamente na Classe 1, enquanto que o número de novos segurados colocados nas classes de agravamento é muito reduzido.

4.4.2 Probabilidades de Anulação

O vector \mathbf{q} , que representa as probabilidades de anulação de apólices para cada uma das classes do Sistema, foi estimado de acordo com as apólices anuladas nas diferentes classes, durante o ano 2010.

Naturalmente que, por representarem a percentagem de apólices anuladas em cada uma das classes, a soma destas probabilidades não é igual 1.

Tabela 4.12: Probabilidades de Anulação para as classes do Sistema

Classe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$q(j)$	0,1278	0,1287	0,1327	0,1367	0,1423	0,1428	0,1502	0,1581	0,1649	0,1653	0,1756	0,1862
Classe	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
$q(j)$	0,2053	0,2206	0,2309	0,2349	0,3102	0,3206	0,3581	0,3381	0,3841	0,3063	0,3760	

Através da análise da Tabela 4.12 é possível verificar que a probabilidade de anulação das apólices aumenta à medida que o *bonus* diminui, ou o agravamento aumenta.

O que traduz o facto de, por um lado, enquanto se encontram nas classes de *bonus* os segurados não abandonam a Seguradora, por outro, à medida que sentem que o prémio está a agravar, os segurados têm tendência a sair da Seguradora.

4.4.3 Modelo de Entradas

No que diz respeito ao número de apólices novas, não foi disponibilizado qualquer histórico das mesmas por parte da Seguradora XYZ. Deste modo, foi feita uma análise da quota de mercado da Seguradora, optando-se por definir como limiar para o número de apólices novas, $\tau = 85.000$. O parâmetro δ foi escolhido tendo em conta a convergência para o limiar de apólices novas. Assim sendo, e tendo em conta que o Mercado Segurador Automóvel não se encontra em rápida expansão, optou-se por escolher $\delta = 0,75$.

Desta forma, o modelo adoptado para o número médio de entradas anuais de apólices para a carteira é dado por:

$$\vartheta_i = 85.000 (1 - e^{-0,75i}), \quad i \in \mathbb{N}.$$

A Figura 4.2 ilustra a evolução do número médio de apólices novas no Sistema.

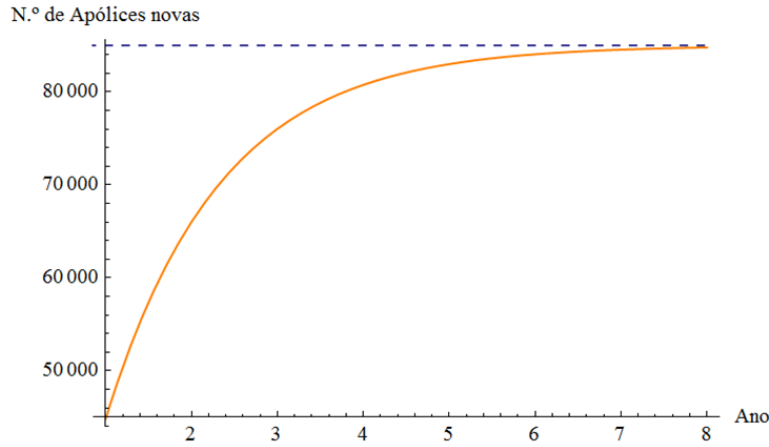


Figura 4.2: Ajustamento assintótico às Entradas de Apólices

4.4.4 Distribuição Limite

De acordo com Guerreiro et al. (2014), a expressão (3.9), que traduz o número esperado de apólices nas diferentes classes do Sistema, é agora dada pela seguinte expressão,

$$\vartheta_{\infty, \lambda}^+ \mathbf{T} = \tau \mathbf{c}^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{1, \lambda})^{-1} \quad (4.4)$$

uma vez que o modelo de entrada de apólices no Sistema é dado pela expressão (3.4).

Por outro lado, tendo em conta que foi necessário discretizar a distribuição da *variável de estrutura* Λ , a distribuição limite para o Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Aberta é obtida a partir de

$$\pi_{\infty}(j) = \sum_{\lambda} \pi_{\infty, \lambda}(j) u_{\lambda}^d, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.5)$$

Desta forma foi possível obter a distribuição limite apresentada na Tabela 4.13.

Tabela 4.13: Distribuição Limite: Carteira Aberta

Classe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\pi_T(j)$	0,4948	0,0068	0,0083	0,0101	0,0274	0,0328	0,0348	0,0365	0,0372	0,0333	0,0344	0,0322
Classe	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
$\pi_T(j)$	0,0333	0,0368	0,0405	0,0463	0,0504	0,0021	0,0015	0,0002	0,0002	$4,67 \times 10^{-5}$	$3,68 \times 10^{-5}$	

Através da análise da Tabela 4.13 é possível verificar que se estima que, numa perspectiva de longo prazo, apenas 49,48% das apólices da carteira se irão concentrar na Classe 1, ao passo que aproximadamente 0,41% estarão nas classe de agravamento.

Ao contrário do que se verificou na distribuição limite do modelo de carteira fechada, a distribuição limite deste modelo não apresenta uma distribuição decrescente dos segurados pelas classes do Sistema. De facto, a proporção de segurados nas Classe 2 a 4 é menor que a proporção de segurados nas classes de *bonus* seguintes.

Conforme referido anteriormente, a frequência de sinistralidade média da carteira é muito baixa, o que faz com que, em média, a probabilidade de um segurado não declarar sinistros seja muito elevada.

Deste modo, e tendo em conta também as regras de transição da Seguradora XYZ, um segurado que seja alocado em qualquer uma das classes do Sistema que não as 5 primeiras, acabará por transitar sucessivamente para as classes anteriores à qual foi alocado inicialmente, até se encontrar na Classe 5, passando directamente desta para a Classe 1.

Este facto, aliado às reduzidas probabilidades de afectação nas Classes 2 a 4, faz com que a proporção de segurados nestas classes, numa perspectiva de longo prazo, seja também ela muito reduzida.

Para além disso, quando comparada com a distribuição limite do modelo de carteira fechada, a distribuição limite do modelo de carteira aberta apresenta uma menor proporção de segurados na Classe 1. Isto deve-se não só ao facto de nem todos os segurados serem alocados inicialmente à Classe 17, mas também ao facto deste modelo admitir entradas e saídas ao longo do tempo, de acordo com as probabilidades de alocação e anulação, respectivamente.

Da análise da evolução da distribuição das apólices pelas classes do Sistema foi possível verificar que, através deste modelo, a carteira da Seguradora XYZ atinge a sua estacionaridade ao fim de 85 anos. Desta forma, e tal como referido no modelo de carteira fechada, as estimativas que constam na Tabela 4.13 apenas deverão ser consideradas após a carteira atingir a estacionaridade.

4.4.5 Evolução do Prémio Médio

A Figura 4.3 apresenta a evolução do prémio médio de um novo segurado.

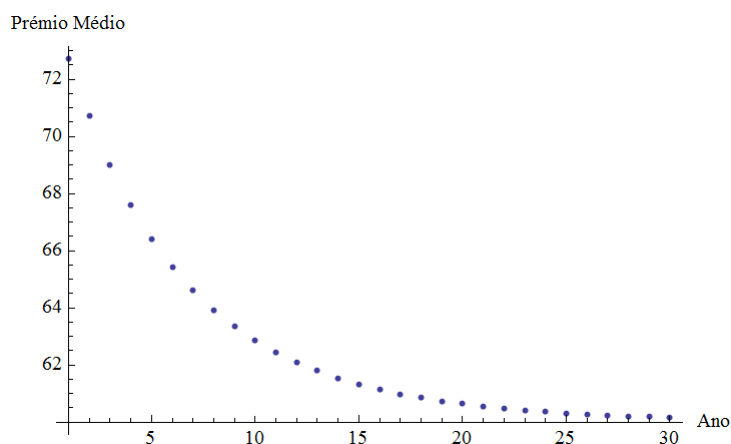


Figura 4.3: Evolução do Prémio Médio - Carteira Aberta

Através da sua análise é possível verificar que o prémio médio estacionário da carteira, que corresponde a 60,01% do prémio a priori, é atingido por um novo segurado ao fim de cerca de 30 anos.

Ao contrário do que se verificou no modelo de carteira fechada, no início do primeiro ano o prémio médio não representa 100% do prémio puro, uma vez que os segurados não são todos colocados na Classe 17, mas sim de acordo com as probabilidades de alocação constantes na Tabela 4.11.

4.4.6 Determinação das Escalas Óptimas

Nesta subsecção serão apresentados os resultados das escalas óptimas de prémios mencionadas no capítulo anterior, obtidas a partir da formulação proposta pelo modelo para o Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Aberta.

A Tabela 4.14 apresenta as escalas óptimas de prémios obtidas para a formulação anteriormente referida.

Comentários à Escala de Norberg

Da análise da Escala de Norberg é possível constatar que, tal como se tinha verificado na Escala de Borgan et al para o modelo de carteira fechada, presente na Tabela 4.8, apesar das classes se encontrarem ordenadas de acordo com a propensão à sinistralidade o mesmo não se verifica na ordenação dos prémios.

Para além disso, também é possível constatar que as Classes 2 a 4 apresentam estimativas para percentagens de prémio puro demasiado elevadas.

Tabela 4.14: Escalas Óptimas de Prémios para o Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Aberta

Classes do Sistema	Vector de Prémios Seguradora XYZ	Escala de Norberg	Escala de Borgan et al	Escala de Gilde e Sundt
1	50	77,112	87,914	83,565
2	50	174,369	196,080	84,592
3	50	181,768	204,312	85,619
4	50	189,804	212,985	86,646
5	52	81,119	85,531	87,674
6	54	84,615	89,474	88,701
7	56	87,183	91,010	89,728
8	58	90,260	92,954	90,755
9	60	94,047	95,345	91,782
10	62,5	94,427	95,278	92,810
11	65	99,575	98,789	93,837
12	67,5	100,502	99,480	94,864
13	70	104,051	101,824	95,891
14	75	103,875	101,922	96,918
15	80	101,447	99,942	97,946
16	90	100,616	99,696	98,973
17	100	100,000	100,000	100,000
18	110	241,242	228,479	101,027
19	120	248,782	228,011	102,054
20	140	377,607	347,855	103,082
21	160	394,056	351,096	104,109
22	190	496,292	432,188	105,136
23	230	523,559	415,217	106,163

O facto destas classes apresentarem, numa perspectiva de longo prazo, uma proporção de segurados demasiado baixa, conforme se pode ver na Tabela 4.13, originam más estimativas da frequência de sinistralidade para valores mais elevados, originando, por isso, percentagens de prémio puro mais elevadas.

De um ponto de vista comercial e actuarial, não é adequado sugerir agravamentos em classes onde seria suposto cobrar prémios bonificados. Desta forma, e tendo em conta que o objectivo principal desta dissertação é verificar o impacto do Sistema de *Bonus Malus* na probabilidade de ruína, optou-se por proceder a um ajuste na frequência de sinistralidade estimada tanto para as Classes 2 a 4, como para as Classes 12 a 16, uma vez que também apresentam prémios agravados.

A Tabela 4.15 apresenta as frequências de sinistralidade esperada e ajustada para o modelo proposto por Norberg (1976).

Tabela 4.15: Frequência de Sinistralidade Esperada *versus* Frequência de Sinistralidade Ajustada - Escala de Norberg

Classes do Sistema	Frequência de Sinistralidade Esperada	Frequência de Sinistralidade Ajustada
1	0,024660	0,024660
2	0,055762	0,024980
3	0,058128	0,025301
4	0,060698	0,025621
5	0,025941	0,025941
6	0,027059	0,027059
7	0,027881	0,027881
8	0,028865	0,028865
9	0,030076	0,030076
10	0,030197	0,030197
11	0,031843	0,031843
12	0,032140	0,031866
13	0,033275	0,031889
14	0,033219	0,031911
15	0,032442	0,031934
16	0,032177	0,031957
17	0,031979	0,031979
18	0,077148	0,077148
19	0,079572	0,079572
20	0,120756	0,120756
21	0,126017	0,126017
22	0,158711	0,158711
23	0,167431	0,167431

As frequências de sinistralidade ajustadas para as Classes 2 a 4 e para as Classes 12 a 16 foram obtidas por forma a que as mesmas apresentassem valores entre as frequências de sinistralidade esperadas para as Classes 1 e 5 e para as Classes 11 a 17, respectivamente.

Através da frequência de sinistralidade ajustada foi possível obter a Escala de Norberg presente na Tabela 4.16.

Tabela 4.16: Escala de Norberg Ajustada

Classes do Sistema	Escala de Norberg Ajustada
1	77,112
2	78,114
3	79,116
4	80,117
5	81,119
6	84,615
7	87,183
8	90,260
9	94,047
10	94,427
11	99,575
12	99,646
13	99,717
14	99,787
15	99,858
16	99,929
17	100,000
18	241,242
19	248,822
20	377,607
21	394,056
22	496,292
23	523,559

Comentários à Escala de Borgan, Hoem e Norberg

Conforme referido anteriormente, a determinação da Escala de Borgan et al pressupõe a definição de uma distribuição ponderada baseada num conjunto de ponderadores.

O conjunto de ponderadores utilizados para o presente modelo foram os mesmos que para o modelo de carteira fechada. Desta forma, obteve-se a distribuição ponderada constante na Tabela 4.17.

Da análise da Tabela 4.17 é possível afirmar que a distribuição ponderada estima uma menor proporção de segurados nas 5 primeiras classes do Sistema, e consequentemente uma maior proporção de segurados nas classes seguintes. No entanto, tal como a distribuição limite, concentra a maior parte das apólices na Classe 1.

Tabela 4.17: Distribuição Estacionária *versus* Distribuição Ponderada - Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Aberta

Classes	Dist. Estacionária	Dist. Ponderada
1	0,494774	0,367660
2	0,006763	0,003173
3	0,008255	0,004544
4	0,010147	0,006675
5	0,027406	0,023149
6	0,032828	0,034070
7	0,034767	0,038026
8	0,036535	0,042333
9	0,037242	0,045252
10	0,033320	0,038321
11	0,034372	0,040844
12	0,032181	0,036626
13	0,033315	0,037532
14	0,036821	0,044512
15	0,040456	0,053997
16	0,046323	0,074340
17	0,050353	0,103719
18	0,002128	0,002541
19	0,001526	0,002166
20	0,000245	0,000252
21	0,000161	0,000188
22	0,000047	0,000042
23	0,000037	0,000039

Através da análise da Escala proposta por Borgan et al. (1981) presente na Tabela 4.14 é possível verificar que a mesma apresenta um comportamento muito semelhante à Escala de Norberg.

Desta forma, e tendo em conta os motivos apresentados anteriormente, optou-se por proceder a um ajuste da frequência de sinistralidade obtida através do modelo de Borgan et al. (1981) para as classes 2 a 4 e para as Classes 13 a 14, uma vez que estas classes apresentam prémios agravados.

Tabela 4.18: Frequência de Sinistralidade Esperada *versus* Frequência de Sinistralidade Ajustada - Escala de Borgan, Hoem e Norberg

Classes do Sistema	Frequência de Sinistralidade Esperada	Frequência de Sinistralidade Ajustada
1	0,026189	0,026189
2	0,058411	0,026011
3	0,060863	0,025834
4	0,063446	0,025656
5	0,025479	0,026561
6	0,026653	0,026653
7	0,027111	0,027111
8	0,027690	0,027690
9	0,028403	0,028403
10	0,028383	0,028383
11	0,029428	0,029428
12	0,029634	0,029634
13	0,030332	0,029680
14	0,030362	0,029726
15	0,029772	0,029772
16	0,029699	0,029699
17	0,029789	0,029789
18	0,068062	0,068062
19	0,067922	0,067922
20	0,103623	0,103623
21	0,104588	0,104588
22	0,128745	0,128745
23	0,123689	0,123689

As frequências de sinistralidade ajustadas para as Classes 2 a 4 e para as Classes 13 a 14 foram obtidas por forma a que as mesmas apresentassem valores entre as frequências de sinistralidade para as Classes 1 e 5 e para as Classes 12 a 15, respectivamente.

Através da frequência de sinistralidade ajustada foi possível obter a seguinte Escala de Borgan, Hoem e Norberg apresentada na Tabela 4.19, a qual será considerada para cálculos posteriores.

Tabela 4.19: Escala de Borgan, Hoem e Norberg Ajustada

Classes do Sistema	Escala de Borgan et al Ajustada
1	87,914
2	87,318
3	86,722
4	86,127
5	89,162
6	89,474
7	91,010
8	92,954
9	95,345
10	95,278
11	98,789
12	99,480
13	99,634
14	99,788
15	99,942
16	99,696
17	100,000
18	228,479
19	228,011
20	347,855
21	351,096
22	432,188
23	415,217

Comentários à Escala de Gilde e Sundt

Ao contrário do modelo de carteira fechada, a Escala de Gilde e Sundt apresentada na Tabela 4.14 foi obtida através da linearização da Escala de Borgan, Hoem e Norberg, uma vez que representa a escala com uma maior medida de eficiência, conforme se pode verificar na Tabela 4.21. Quando comparada com a Escala de Gilde e Sundt obtida para o modelo de carteira fechada, esta escala apresenta descontos e agravamentos mais baixos.

A Tabela 4.20 apresenta as escalas ótimas de prémios obtidas após os ajustes referidos anteriormente. Através desta tabela é possível verificar que todas as escalas ótimas de prémios apresentam *bonus* muito baixos. Para além disso, tanto a Escala de Norberg como a Escala de Borgan et al, apresentam agravamentos muito elevados, sendo por isso desadequados, de um ponto de vista prático.

Tabela 4.20: Escalas Óptimas de Prémios Ajustadas para o Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Aberta

Classes do Sistema	Vector de Prémios Seguradora XYZ	Escala de Norberg	Escala de Borgan et al	Escala de Gilde e Sundt
1	50	77,112	87,914	83,565
2	50	78,114	87,318	84,592
3	50	79,116	86,722	85,619
4	50	80,117	86,127	86,646
5	52	81,119	85,531	87,674
6	54	84,615	89,474	88,701
7	56	87,183	91,010	89,728
8	58	90,260	92,954	90,755
9	60	94,047	95,345	91,782
10	62,5	94,427	95,278	92,810
11	65	99,575	98,789	93,837
12	67,5	99,646	99,480	94,864
13	70	99,717	99,634	95,891
14	75	99,787	99,788	96,918
15	80	99,858	99,942	97,946
16	90	99,929	99,696	98,973
17	100	100,000	100,000	100,000
18	110	241,242	228,479	101,027
19	120	248,782	228,011	102,054
20	140	377,607	347,855	103,082
21	160	394,056	351,096	104,109
22	190	496,292	432,188	105,136
23	230	523,559	415,217	106,163

À semelhança do que foi feito para o modelo de carteira fechada, a escolha da escala óptima de prémios, para além de ter em conta a eficiência de cada escala, também irá ter em conta a probabilidade de ruína associada à mesma.

4.4.7 Medidas de Eficiência das Escalas Óptimas de Prémios

A Tabela 4.21 apresenta as medidas de eficiência associadas às escalas de prémios apresentadas anteriormente.

Tabela 4.21: Medidas de Eficiência das Escalas de Prémios

	Escala de Norberg	Escala de Borgan et al.	Escala de Gilde e Sundt
$e(T)$	0,000790699	0,000801968	0,00079228

Através da sua análise é possível afirmar que a escala de prémios que apresenta uma maior eficiência é a Escala de Borgan et al.

A perda de eficiência ocorrida por se escolher a Escala de Gilde e Sundt em detrimento da Escala de Borgan et al é de 0,987919, pelo que a introdução das restrições da Escala de Gilde e Sundt não se traduzem numa redução da qualidade das estimativas.

4.5 Probabilidade de Ruína em tempo contínuo e finito

Nesta secção pretende-se mostrar os resultados obtidos para a probabilidade de ruína em tempo contínuo e finito, tanto para o modelo de carteira fechada como para o modelo de carteira aberta.

Como se pôde verificar ao longo da Secção 4.1, o Sistema de *Bonus Malus* tem subjacente um processo de Poisson-Misto. Já o método proposto por Afonso et al. (2009) admite que as indemnizações agregadas seguem um processo de Poisson. Apesar de, por esta razão, não ser o método mais adequado para avaliar a probabilidade de ruína na presença de um Sistema de *Bonus Malus*, optou-se por utilizar o mesmo no sentido de analisar o impacto deste Sistema na probabilidade de ruína pretendida. No entanto, note-se que a expressão proposta por Afonso et al. (2009) deveria ser ajustada para processos de Poisson-Mistos.

Conforme referido anteriormente, o método de cálculo da probabilidade de ruína proposto por Afonso et al. (2009), requer que, numa primeira fase, seja necessário efectuar a simulação das indemnizações agregadas a partir de uma distribuição Gama Deslocada, cujos momentos coincidem com os momentos das indemnizações agregadas originais. Para tal, e tendo em conta as expressões apresentadas na Subsecção 2.2.1., é necessário, numa primeira instância, determinar os parâmetros da distribuição Gama Deslocada.

A Tabela 4.22 apresenta os momentos das indemnizações individuais da Seguradora XYZ.

Tabela 4.22: Momentos das Indemnizações Individuais da Seguradora

Momentos da Indemnizações Individuais	
Média	1766,30893
Variância	71097953,5
Skewness	35,1434036

Tendo em conta que,

$$\text{Variância} = \mu'_2 - \mu^2$$

$$\text{Skewness} = \mu'_3 - 3\mu\mu'_2 + 2\mu^3$$

Os parâmetros obtidos para a distribuição Gama Deslocada são,

$$\alpha = 108.298$$

$$\beta = 0,000388317$$

$$\kappa = -2,61799 \times 10^8$$

No caso particular do estudo efectuado nesta dissertação, os prémios a utilizar para os diferentes anos de cálculo da probabilidade de ruína podem ser definidos inicialmente, uma vez que apenas dependem da escala de prémios e da distribuição das apólices da carteira pelas classes do Sistema para os diferentes anos de cálculo.

De modo a conseguirmos verificar o impacto do Sistema de *Bonus Malus* no cálculo da probabilidade de ruína efectuado através do modelo proposto por Afonso et al. (2009) foram utilizados os seguintes prémios:

- Prémio Puro = $E[X] E[N] (1 + \alpha)$ com $\alpha = 15\%$.
- Prémio Comercial.
- Escala Óptima de Norberg.
- Escala Óptima de Borgan et al.
- Escala Óptima de Gilde e Sundt.

O prémio puro é o único prémio que não se encontra sob a hipótese da existência de um Sistema *Bonus Malus*. Sendo, desta forma, constante ao longo do tempo e igual para as duas formulações do Sistema de *Bonus Malus* apresentadas.

4.5.1 Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Fechada

A Figura 4.4 apresenta a evolução expectável dos prémios referidos anteriormente, para o Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Fechada.

Da análise do gráfico é possível verificar que, como seria de esperar, no instante 0 todos os prémios apresentam o mesmo valor, o que se deve ao facto de todos os segurados entrarem na Classe 17, classe que não apresenta quaisquer agravamentos ou descontos, e como tal cobra 100% do prémio puro.

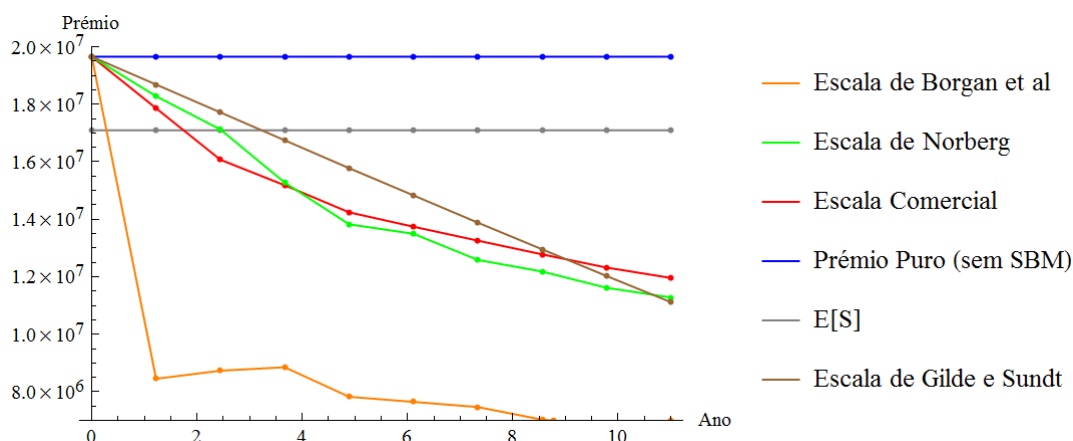


Figura 4.4: Prêmios - Carteira Fechada

Para os restantes anos, os prêmios são determinados tendo em conta a distribuição das apólices presentes na Tabela A.2, em anexo. Observando os valores da tabela é possível verificar que ao fim de apenas 1 ano, estima-se que apenas cerca de 97,24% das apólices se encontram na Classe 16. Tanto a escala de prêmios proposta pela Seguradora, como a Escala de Norberg e a Escala de Gilde e Sundt cobram cerca de 90% do prémio puro nesta classe, o que faz com que ao fim de um ano o decréscimo verificado nestes prêmios não seja muito elevado. Já a Escala de Borgan et al propõe que se cobre apenas 40% do prémio puro nesta classe e, por isso, verifica um decréscimo muito elevado no prémio ao fim de apenas um ano.

Ainda através da Tabela A.2 é possível constatar que ao longo do tempo as apólices tendem a concentrar-se nas classes mais baixas, classes essas que cobram uma menor percentagem de prémio puro. Desta forma, e como é possível verificar através da Figura 4.4, os prêmios tendem a decrescer gradualmente ao longo dos anos.

Para além disso, também é possível verificar que a Escala proposta por Borgan et al. (1981) encontra-se abaixo das restantes, ao longo dos anos em análise, uma vez que esta escala, conforme se constatou anteriormente, propõe percentagens do prémio puro muito baixas.

A escolha do horizonte temporal para cálculo da probabilidade de ruína foi efectuada após a análise da Figura 4.4. Desta forma, foram calculadas as probabilidades de ruína ao fim de 4 anos, ou seja, $\psi(u, 4)$, dado que para os primeiros 4 anos os prêmios estão, em média, entre o valor esperado das indemnizações agregadas e o prémio puro, e ao fim de 9 anos, ou seja, $\psi(u, 9)$, dado que se encontram abaixo do valor esperado das indemnizações agregadas.

Para os casos em que, no processo de simulação, a probabilidade de ruína ao fim de um ano foi obtida através da expressão (2.7), tornou-se necessário a utilização de uma boa aproximação para que os erros cometidos pela mesma não fossem superiores aos próprios resultados. Desta forma, recorreu-se à quadratura de Simpson Revista, conforme

Gander e Gautschi (2000).

Assim, para uma reserva inicial $u = 500.000$ u.m. e um total de 1.000 simulações das indemnizações agregadas obtidas através da fixação de uma semente, foi possível obter as probabilidades de ruína para os diferentes prémios, ilustradas na Tabela 4.23.

Tabela 4.23: Probabilidades de ruína em tempo contínuo e finito - Carteira Fechada

Escala de Prémios	$\psi(\hat{u}, 4)$	$\psi(\hat{u}, 9)$
Prémio Puro	0,027327	0,027327
Escala Comercial	0,323331	1
Escala de Norberg	0,092626	1
Escala de Borgan et al	1	1
Escala de Gilde e Sundt	0,030987	1

Da análise da Tabela 4.23 é possível verificar que o prémio puro apresenta probabilidades de ruína iguais ao fim de 4 ou 9 anos, o que se deve, sobretudo, ao facto da reserva no início de cada período apresentar valores demasiado elevados, conforme se pode verificar na Figura A.5 (em anexo). Pois ao contrário dos outros prémios considerados, este prémio não apresenta uma evolução decrescente ao longo dos anos, mas sim constante. Deste modo, o impacto causado pela reserva na probabilidade de ruína em cada período é mínimo.

Para além disso, é possível constatar que a aplicação do Sistema de *Bonus Malus* origina probabilidades de ruína superiores. De facto, os prémios apresentados para o Sistema de *Bonus Malus* (Escala Comercial, Escala de Norberg, Escala de Borgan et al e Escala de Gilde e Sundt) apresentam valores mais baixos que o Prémio Puro, uma vez que com o passar do tempo as apólices tendem a concentrar-se nas classes mais baixas, classes essas que cobram apenas uma percentagem do Prémio Puro.

A Escala de Gilde e Sundt, quando comparada com as restantes escalas apresentadas para o Sistema de *Bonus Malus*, apresenta prémios mais elevados ao longo dos 4 primeiros anos, o que faz com que a reserva para esses anos seja maior e, consequentemente, a probabilidade de ruína ao fim de 4 anos seja menor.

A Escala de Prémios proposta pela Seguradora XYZ (Escala Comercial) e a Escala de Norberg cobram aproximadamente o mesmo prémio ao fim de 4 anos, pelo que seria expectável que as mesmas apresentassem probabilidades de ruína muito próximas.

No entanto é necessário ter em conta que nos 3 primeiros anos a Escala de Norberg cobra prémios mais elevados, originando, por isso, reservas mais elevadas para estes períodos. Desta forma, e tendo em conta que a probabilidade de ruína apresentada na Tabela 4.23 tem em consideração o comportamento da reserva durante esses 4 anos, é normal que a mesma apresente valores mais baixos para a Escala de Norberg.

Como seria de esperar, a Escala de Borgan et al, é a única escala de prémios que conduz à ruína ao fim de 4 anos, uma vez que apresenta prémios muito abaixo do valor esperado das indemnizações agregadas. Contudo, verifica-se que ao fim dos 9 anos todos os prémios apresentados para o Sistema de *Bonus Malus* conduzem a Seguradora à ruína.

Por forma a verificar a evolução das probabilidades de ruína ao longo dos vários anos, foram calculadas as probabilidades de ruína ao fim de n anos, $\psi(u, n)$, para $n \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

A Figura 4.5 ilustra a evolução dessas probabilidades.

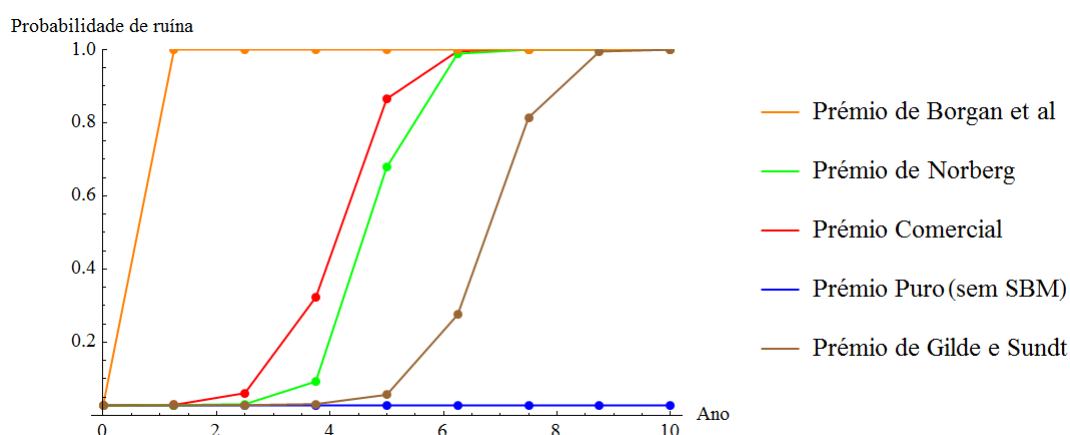


Figura 4.5: Probabilidades de Ruína - Carteira Fechada

A partir da Figura 4.5 é ainda possível verificar que a Escala de Prémios proposta pela Seguradora XYZ (Escala Comercial) faz com que a mesma atinja, em média, a ruína ao fim de 7 anos. Já as escalas óptimas propostas na presente dissertação estimam diferentes horizontes para a ruína da Seguradora. De facto, a Escala de Borgan et al conduz a Seguradora à ruína ao fim de apenas 2 anos, já as Escalas de Norberg e Gilde e Sundt conduzem expectavelmente à ruína ao fim de 7 e 9 anos, respectivamente. No entanto, ao fim de 9 anos todas as escalas de prémios apresentadas para o Sistema de *Bonus Malus* levam a que a Seguradora atinja a ruína, uma vez que as mesmas apresentam valores de prémios demasiado baixos.

Conforme referido anteriormente, a escolha da escala óptima de prémios para a Seguradora XYZ deveria ter em conta, não só a eficiência da mesma, mas também a probabilidade de ruína que apresentava para a Seguradora.

Desta forma, e tendo em conta que as escalas de prémios mais eficientes são a Escala de Norberg e a Escala de Gilde e Sundt, ver Tabela 4.10, a escala de prémios que a Seguradora deverá optar é a Escala proposta por Gilde e Sundt (1989), pois apresenta probabilidades de ruína menores ao longo dos vários anos.

4.5.2 Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Aberta

A Figura 4.6 ilustra os prémios referidos no início desta secção, tendo em conta a formulação do Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Aberta.

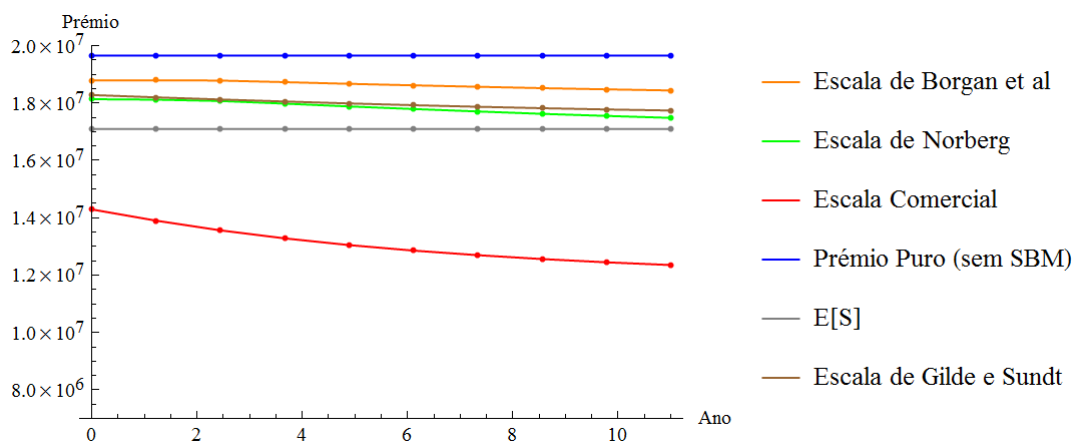


Figura 4.6: Prémios - Carteira Aberta

Como é possível verificar através da mesma, à excepção do instante 0 em que os segurados são alocados de acordo com o vector de probabilidades de alocação, \mathbf{c} , originando, desta forma, prémios mais baixos para o modelo de carteira aberta, nos restantes anos verifica-se que os prémios para o modelo de carteira aberta apresentam valores mais elevados que os prémios para o modelo de carteira fechada.

O que se deve ao facto de, para além de no modelo de carteira fechada a proporção de segurados nas classes com bónus mais elevado ser superior ao modelo de carteira aberta, conforme se pode verificar na Tabela A.2 e na Tabela A.3, ambas em anexo, as escalas de prémios obtidas para o modelo de carteira fechada apresentam valores mais baixos, quando comparadas com as escalas determinadas para o modelo de carteira aberta.

Através da análise da Tabela A.3 é ainda possível verificar que a distribuição das apólices ao longo dos 9 anos não varia muito, o que faz com que os prémios apresentados na Figura 4.6 não variem muito ao longo destes anos. O mesmo não se constata para o modelo de carteira fechada, uma vez que, de acordo com a Tabela A.2, apresenta distribuições de apólices muito diferentes e cada vez mais concentradas nas classes de maior bónus, ao longo destes anos, levando a que os prémios decresçam bastante ao longo dos 9 anos em análise.

Da análise da Figura 4.6 é possível constatar também que, à excepção da escala de prémios proposta pela Seguradora XYZ que se encontra abaixo do valor esperado das indemnizações agregadas, os restantes prémios encontram-se sempre entre o prémio puro e o valor esperado das indemnizações agregadas.

Apenas num horizonte de 30 anos se verifica que a Escala de Norberg vai assumindo valores abaixo do valor esperado das indemnizações agregadas.

De um ponto de vista prático, analisar a probabilidade de ruína ao fim de 30 anos, para além de ser um processo moroso, não se revela muito interessante para a Seguradora visto que se trata de um horizonte muito longínquo.

Desta forma, e tendo em conta novamente que o objectivo desta dissertação é analisar o impacto do Sistema de *Bonus Malus* na probabilidade de ruína da Seguradora, optou-se por considerar o mesmo horizonte temporal, o que permite também analisar as diferenças verificadas entre as duas formulações apresentadas (Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Fechada e Sistema de *Bonus Malus* - Carteira Aberta).

Considerando a mesma reserva inicial e a mesma semente para a simulação das indemnizações agregadas, foi possível obter as seguintes probabilidades de ruína.

Tabela 4.24: Probabilidades de ruína em tempo contínuo e finito - Carteira Aberta

Escala de Prémios	$\psi(\hat{u}, 4)$	$\psi(\hat{u}, 9)$
Prémio Puro	0,027327	0,027327
Escala Comercial	1	1
Escala de Norberg	0,230158	0,233108
Escala de Borgan et al	0,089837	0,089841
Escala de Gilde e Sundt	0,189927	0,190668

À semelhança do que se verificou no modelo de carteira fechada, a introdução de um Sistema de *Bonus Malus* com esta formulação no método de Afonso et al. (2009) origina probabilidades de ruína mais elevadas que as obtidas apenas através do prémio puro.

Através da análise da Tabela 4.24 é possível constatar que a única escala de prémios que apresenta ruína para a carteira, neste horizonte temporal, é a escala de prémios proposta pela Seguradora. O facto desta escala apresentar valores muito abaixo do valor esperado das indemnizações agregadas faz com que a mesma conduza a Seguradora à ruína ao fim de apenas 2 anos, conforme se pode verificar na Figura 4.7.

Ao apresentarem prémios demasiado elevados, a Escala de Norberg, a Escala de Borgan et al e a Escala de Gilde e Sundt, originam reservas de tal forma elevadas, que o impacto causado nas probabilidades de ruína para cada período é tão ínfimo que não se verificam grandes variações nas probabilidades de ruína ao fim de 4 e 9 anos. Naturalmente que a Escala de Borgan et al, por apresentar prémios mais elevados, quando comparados com a Escala de Norberg e a Escala de Gilde e Sundt, leva a com que as reservas no início de cada ano sejam superiores e, conseqüentemente, as probabilidades de ruína sejam menores.

De um ponto de vista de análise comparativa com os resultados obtidos para o modelo de carteira fechada, e tendo em conta que este último modelo apresenta prémios para as escalas óptimas mais baixos ao longo dos anos, seria de esperar que as probabilidades de ruína obtidas para o modelo de carteira aberta fossem inferiores. No entanto,

tal só se verificar para a Escala de Borgan et al, conforme se pode analisar através da Tabela 4.23 e da Tabela 4.24.

Ao analisar a Escala de Norberg, tanto para o modelo de carteira aberta como para o modelo de carteira fechada, é possível verificar que no instante 0 o prémio cobrado no modelo de carteira fechada é superior, uma vez que, ao contrário do modelo de carteira aberta, as apólices encontram-se todas na classe que cobra 100% do prémio puro. O que faz com que a reserva no fim do primeiro ano seja bastante superior no modelo de carteira fechada. Dado que a reserva no primeiro ano é mais elevada, mesmo que os prémios para os dois anos seguintes sejam inferiores no modelo de carteira fechada, as reservas para estes anos são superiores, conforme se pode verificar através da Figura A.1 e da Figura A.2.

Desta forma, e tendo em conta novamente que as probabilidades de ruína presentes na Tabela 4.24 têm em consideração o comportamento da reserva ao longo dos primeiros 4 anos, é justificável que o modelo de carteira aberta apresente probabilidades de ruína superiores ao modelo de carteira fechada, uma vez que, em média, as reservas para este último modelo são superiores. No entanto, é necessário ter em conta que as reservas para o modelo de carteira fechada não são reais, pois o histórico da Seguradora indica que os segurados não são todos colocados na Classe de Entrada.

A mesma análise pode ser feita para a Escala de Gilde e Sundt, através da Figura A.3 e da Figura A.4 (ambas em anexo).

A figura seguinte ilustra a evolução das probabilidades de ruína ao longo dos vários anos, ou seja, a evolução de $\psi(u, n)$, para $n \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

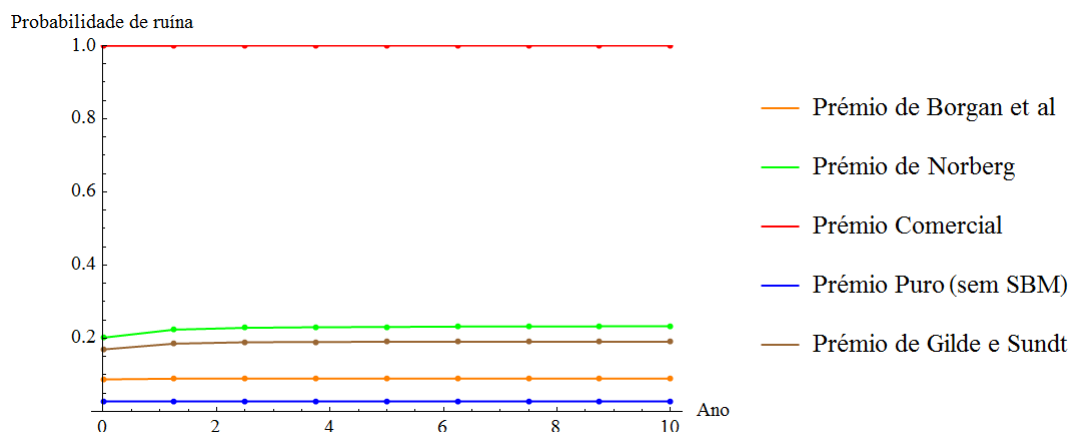


Figura 4.7: Probabilidades de Ruína - Carteira Aberta

Através da Figura 4.7 é possível verificar que, de acordo com o que foi dito anteriormente, as probabilidades de ruína ao fim de cada um dos anos são relativamente estáveis.

Tal como no modelo de carteira fechada, a escolha da escala óptima de prémios para além de ter em conta a eficiência de cada escala, determinadas na subsecção 4.4.7, deve

também ter em consideração a probabilidade de ruína obtida através da mesma. Assim sendo, e tendo em conta que a escala de prémios que apresenta uma maior medida de eficiência e uma menor probabilidade de ruína é a escala de Borgan et al, a Seguradora deveria optar pela escolha desta escala.

Tendo em conta os resultados obtidos anteriormente, é possível concluir que a utilização do Sistema de *Bonus Malus*, tanto através da formulação clássica, como através da formulação da carteira aberta, sugerida por Guerreiro e Mexia (2004), origina probabilidades bastante superiores, quando comparadas com as probabilidades obtidas através do prémio puro.



Conclusão

Ao longo desta dissertação foi sempre referido que o objectivo principal da mesma seria avaliar o impacto causado pelo Sistema de *Bonus Malus* na probabilidade de ruína em tempo contínuo e finito.

A análise foi feita tanto para o modelo clássico do Sistema de *Bonus Malus*, que tem como limitações o facto de assumir que a carteira é fechada (não são considerados os movimentos de entrada e saída de segurados ao longo do tempo) e a existência de uma classe de entrada (na qual se supõe serem colocados todos os novos segurados), como através do modelo reformulado por Guerreiro (2001), que surge como uma abordagem alternativa com o objectivo de contornar estes pressupostos.

Dos resultados obtidos concluiu-se que a utilização das escalas de prémios apresentadas para o Sistema de *Bonus Malus* leva a que as probabilidades de ruína aumentem consideravelmente, muito devido ao facto de, na presença de um Sistema de *Bonus Malus* com as características do estudado e a baixa frequência de sinistralidade da carteira automóvel utilizada, se verificar uma elevada concentração das apólices na classe de maior bónus (no caso da formulação para carteiras fechadas). Desta forma, os prémios são de tal modo baixos que as probabilidades de ruína associadas são elevadas.

A formulação para o modelo de carteira aberta não nos permite retirar o mesmo tipo de conclusões. De facto, este modelo concentra uma menor percentagem de apólices na classe de maior bónus e, como tal, apresenta prémios mais elevados. Com efeito, as probabilidades de ruína estimadas através deste modelo são inferiores às probabilidades estimadas através do modelo clássico do Sistema de *Bonus Malus*, mas, ainda assim, superiores às probabilidades de ruína obtidas quando não é considerado um Sistema de *Bonus Malus* na carteira.

Espera-se que os resultados obtidos dependam do Sistema de *Bonus Malus* de cada Seguradora, bem como da frequência de sinistralidade observada entre os segurados da carteira. No entanto, o impacto verificado na probabilidade de ruína acaba por ser o já explicado anteriormente.

Durante a execução deste projecto surgiram tópicos que seriam interessantes explorar, dos quais se salientam:

- Verificar o impacto causado pela utilização de uma carga de segurança diferente da apresentada.
- Calcular as probabilidades de ruína considerando diferentes valores para a reserva inicial.
- Determinar os intervalos de confiança para as probabilidades de ruína obtidas.

Desta forma, fica a intenção de incluir todas estas análises em trabalhos futuros.

Bibliografia

- Afonso, L. B., A. D. E. dos Reis e H. R. Waters (2009). "Calculating continuous time ruin probabilities for a large portfolio with varying premiums". *ASTIN Bulletin* 39(01), pp. 117–136.
- Afonso, M. d. L. B. (2008). *Evaluation of ruin probabilities for surplus processes with credibility and surplus dependent premiums*. Tese de Douturamento. Instituto Superior de Economia e Gestão.
- Andrade e Silva, J. (1991). "Estruturas Tarifárias nos Ramos Reais da Indústria Seguradora—Uma Aplicação ao sector automóvel em Portugal". *Instituto Superior de Economia e Gestão*.
- Asmussen, S. (2000). "Ruin Probabilities. Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, 2". *River Edge, NJ: World Scientific*.
- Borgan, Ø., J. Hoem e R. Norberg (1981). "A Non Asymptotic Criterion for the Evaluation of Automobile Bonus System". *Scandinavian Actuarial Journal* 3, pp. 165–178.
- Bühlmann, H. (1970). *Mathematical methods in risk theory*. Vol. 172. Springer.
- Centeno, M. (2003). *Teoria do Risco na Actividade Seguradora*. Celta Editora.
- De Vylder, F. e M. J. Goovaerts (1988). "Recursive calculation of finite-time ruin probabilities". *Insurance: Mathematics and Economics* 7(1), pp. 1–7.
- DePril, N. (1978). *The efficiency of a bonus-malus system*. Vol. 10. 11. *ASTIN Bulletin*, pp. 59–72.
- Dickson, D. C. e H. R. Waters (1991). "Recursive calculation of survival probabilities". *Astin Bulletin* 21(2), pp. 199–221.
- Dickson, D. C. e H. R. Waters (2006). *Optimal dynamic reinsurance*. Vol. 36. 2. *ASTIN Bulletin*, pp. 415–432.
- Egídio dos Reis, A. (1999). "Teoria da Ruína". *Instituto Superior de Economia e Gestão*.
- Esquível M.L., G. G. F. J. (2014). "On the Evolution and Asymptotic Analysis of Open Markov Populations: Application to Consumption Credit". *Stochastic Models* 30(3), pp. 365–389.
- Gander, W. e W. Gautschi (2000). "Adaptive quadrature—revisited". *BIT Numerical Mathematics* 40(1), pp. 84–101.

- Gerber, H. U. (1979). *An introduction to mathematical risk theory*. Vol. 8. SS Huebner Foundation for Insurance Education, Wharton School, University of Pennsylvania Philadelphia.
- Gilde, V. e B. Sundt (1989). "On Bonus systems with credibility scales". *Scandinavian Actuarial Journal* 1989(1), pp. 13–22.
- Guerreiro, G. R. e J. T. Mexia (2004). "An alternative approach to bonus malus". *Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics* 24(2), pp. 197–213.
- Guerreiro, G. R. e J. T. Mexia (2008). "Stochastic vortices in periodically reclassified populations". *Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics* 28(2), pp. 209–227.
- Guerreiro, G. R., J. T. Mexia e M. de Fátima Miguens (2010). "A model for open populations subject to periodical re-classifications". *Journal of Statistical Theory and Practice* 4(2), pp. 303–321.
- Guerreiro, G. R., J. T. Mexia e M. de Fátima Miguens (2012). "Stable Distributions for Open Populations Subject to Periodical Reclassifications". *Journal of Statistical Theory and Practice* 6(4).
- Guerreiro, G. R., J. T. Mexia e M. de Fátima Miguens (2013). "Preliminary Results on Confidence Intervals for Open Bonus Malus". *Advances in Regression, Survival Analysis, Extreme Values, Markov Processes and Other Statistical Applications*. Springer, pp. 223–230.
- Guerreiro, G. R., J. T. Mexia e M. de Fátima Miguens (2014). "Statistical Approach for Open Bonus Malus". *ASTIN Bulletin* 44(01), pp. 63–83.
- Guerreiro, G. R. D. (2001). *Uma Abordagem Alternativa para Bonus Malus*. Tese de Mestrado. Instituto Superior de Economia e Gestão.
- Kaas, R., M. Goovaerts, J. Dhaene e M. Denuit (2001). *Modern actuarial risk theory*. Vol. 328. Springer.
- Lemaire, J. (1995). *Bonus-malus systems in automobile insurance*. Vol. 19. Springer.
- Lundberg, F. (1903). "Approximerad framställning afsannolikhetsfunktionen: II. återförsäkring af kollektivrisker..." Tese de doutoramento. Almqvist & Wiksells Boktr.
- Mexia, J (1999). "Vórtices Estocásticos de Parâmetro Discreto". *Communication in the III Actuarial Colloquium FCT-UNL (In Portuguese)*.
- Murteira, B., C. S. Ribeiro, J. A. e Silva e C. Pimenta (2007). *Introdução à estatística*. McGraw-Hill.
- Norberg, R. (1976). "A credibility theory for automobile bonus systems". *Scandinavian Actuarial Journal* 1976(2), pp. 92–107.
- Pereira, E. F. (1997). "Sistemas de Bonus-Malus no Seguro Automóvel". *Revista do Instituto de Seguros de Portugal*, pp. 7–18.
- Pesonen, M (1963). "A numerical method of finding a suitable bonus scale". *ASTIN Bulletin* 2, pp. 102–108.
- Rodrigues, E. V. C. T. (2010). *Uma abordagem comparativa e analítica de dois sistema de Bonus Malus em Cabo Verde: O sistema actual e a proposta da garantia*. Tese de Mestrado. FCT-UNL.

BIBLIOGRAFIA

Ross, S. M. (1996). *Stochastic Processes*. Wiley & Sons.

Seal, H. L. (1978). *Survival probabilities - The Goal of Risk Theory*. Wiley, New York.



Anexos

Com vista a auxiliar a compreensão de alguns dos resultados e conclusões retirados ao longo desta dissertação optou-se por apresentar os seguintes anexos:

- A Tabela [A.1](#), na qual são apresentadas as probabilidades da distribuição Gama discretizada para $\lambda \in]0; 0, 5]$ de acordo com o método de discretização à unidade mais próxima.
- A Tabela [A.2](#) ilustra a distribuição das apólices pelas classes do Sistema ao fim de n anos, para $n \in \{1, 2, \dots, 9\}$, para o modelo de carteira fechada.
- A Tabela [A.3](#) apresenta a distribuição das apólices pelas classes do Sistema ao fim de n anos, para $n \in \{1, 2, \dots, 9\}$, para o modelo de carteira aberta.
- A Figura [A.1](#) e a Figura [A.2](#) apresentam a evolução da reserva durante os 9 anos de análise da probabilidade de ruína, quando é considerado a Escala proposta por Norberg (1976), para o modelo de carteira aberta e para o modelo de carteira fechada, respectivamente. A evolução apresentada teve apenas em consideração 50 das 1.000 simulações efectuadas.
- A Figura [A.3](#) e a Figura [A.4](#) apresentam a evolução da reserva durante os 9 anos de análise da probabilidade de ruína, quando é considerado a Escala proposta por Gilde e Sundt (1989), para o modelo de carteira aberta e para o modelo de carteira fechada, respectivamente. A evolução apresentada também teve apenas em consideração 50 das 1.000 simulações efectuadas.
- A Figura [A.5](#) ilustra a evolução da reserva quando é tido em conta o prémio puro.

Tabela A.1: Discretização da *Distribuição Estrutural*

λ	u_{λ}^d	λ	u_{λ}^d	λ	u_{λ}^d	λ	u_{λ}^d
0,005	0,3738120	0,130	0,0030254	0,255	0,0001847	0,380	0,0000128
0,010	0,1054350	0,135	0,0026922	0,260	0,0001657	0,385	0,0000115
0,015	0,0792288	0,140	0,0023972	0,265	0,0001487	0,390	0,0000103
0,020	0,0629392	0,145	0,0021358	0,270	0,0001335	0,395	0,0000093
0,025	0,0515077	0,150	0,0019038	0,275	0,0001198	0,400	0,0000084
0,030	0,0429444	0,155	0,0016980	0,280	0,0001076	0,405	0,0000075
0,035	0,0362651	0,160	0,0015150	0,285	0,0000966	0,410	0,0000068
0,040	0,0309115	0,165	0,0013524	0,290	0,0000867	0,415	0,0000061
0,045	0,0265360	0,170	0,0012077	0,295	0,0000779	0,420	0,0000055
0,050	0,0229077	0,175	0,0010790	0,300	0,0000700	0,425	0,0000049
0,055	0,0198651	0,180	0,0009643	0,305	0,0000629	0,430	0,0000045
0,060	0,0172910	0,185	0,0008621	0,310	0,0000565	0,435	0,0000040
0,065	0,0150977	0,190	0,0007710	0,315	0,0000508	0,440	0,0000036
0,070	0,0132178	0,195	0,0006897	0,320	0,0000456	0,445	0,0000032
0,075	0,0115985	0,200	0,0006172	0,325	0,0000410	0,450	0,0000029
0,080	0,0101980	0,205	0,0005524	0,330	0,0000369	0,455	0,0000026
0,085	0,0089824	0,210	0,0004946	0,335	0,0000331	0,460	0,0000024
0,090	0,0079239	0,215	0,0004429	0,340	0,0000298	0,465	0,0000021
0,095	0,0069999	0,220	0,0003968	0,345	0,0000268	0,470	0,0000019
0,100	0,0061914	0,225	0,0003555	0,350	0,0000241	0,475	0,0000017
0,105	0,0054823	0,230	0,0003186	0,355	0,0000217	0,480	0,0000016
0,110	0,0048595	0,235	0,0002856	0,360	0,0000195	0,485	0,0000014
0,115	0,0043113	0,240	0,0002560	0,365	0,0000175	0,490	0,0000013
0,120	0,0038283	0,245	0,0002296	0,370	0,0000158	0,495	0,0000011
0,125	0,0034020	0,250	0,0002059	0,375	0,0000142	0,500	0,0000110

Tabela A.2: Distribuição das apólices no ano n - Carteira Fechada

Classe	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	Ano 6	Ano 7	Ano 8	Ano 9
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,805732
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,822599	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0,840385	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0,859178	0	0	0,065742
12	0	0	0	0	0	0,879079	0	0	0,069251	0,032871
13	0	0	0	0	0,900205	0	0	0,073093	0,034625	0,034129
14	0	0	0	0,922691	0	0	0,077315	0,036547	0,036001	0,031954
15	0	0	0,946692	0	0	0,081972	0,038658	0,019782	0,016967	0,011781
16	0	0,972391	0	0	0,087128	0,020493	0,001661	0,018611	0,009213	0,006338
17	1	0	0	0,069647	0	0,001835	0,016057	0,004072	0,003188	0,006056
18	0	0	0,049634	0	0,002037	0,012848	0,002270	0,001901	0,004848	0,001780
19	0	0,026616	0	0,002270	0,008825	0,000675	0,001437	0,003766	0,001018	0,001279
20	0	0	0,001695	0,004540	0,000073	0,001217	0,002412	0,000424	0,000863	0,001344
21	0	0,000954	0,001695	0,000085	0,000903	0,001384	0,000239	0,000672	0,000904	0,000348
22	0	0	0,000067	0,000521	0,000642	0,000188	0,000481	0,000534	0,000246	0,000384
23	0	0,000040	0,000218	0,000248	0,000187	0,000309	0,000292	0,000214	0,000277	0,000262

Tabela A.3: Distribuição das apólices no ano n - Carteira Aberta

Classe	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	Ano 6	Ano 7	Ano 8	Ano 9
1	0,278082	0,284875	0,295003	0,306843	0,320415	0,335727	0,350857	0,365536	0,379179	0,391463
2	0	0	0,000188	0,001119	0,001921	0,002559	0,003071	0,003505	0,003893	0,004234
3	0	0,000346	0,001808	0,002856	0,003607	0,00412	0,004660	0,005087	0,005462	0,005795
4	0,000933	0,003456	0,004652	0,005396	0,005934	0,006389	0,006810	0,007187	0,007527	0,007829
5	0	0,009260	0,014680	0,018992	0,023483	0,025725	0,027477	0,028335	0,028529	0,028506
6	0,025162	0,027304	0,030070	0,034083	0,035423	0,036560	0,036821	0,036452	0,035971	0,035470
7	0,030011	0,033634	0,038841	0,039746	0,040662	0,040573	0,039808	0,039012	0,038264	0,038085
8	0,039086	0,046127	0,045310	0,045513	0,044717	0,043301	0,042042	0,040959	0,040668	0,042948
9	0,057799	0,050505	0,049344	0,047495	0,045244	0,043484	0,042084	0,041775	0,044783	0,045163
10	0,036097	0,040723	0,040377	0,038556	0,037131	0,036045	0,036260	0,040673	0,041488	0,041031
11	0,048769	0,044419	0,040456	0,038173	0,036720	0,037172	0,043239	0,044322	0,043727	0,042791
12	0,035679	0,032387	0,031197	0,030565	0,032321	0,041514	0,043317	0,042754	0,041719	0,040551
13	0,026073	0,027096	0,027521	0,031198	0,045262	0,047723	0,046839	0,045397	0,043821	0,042384
14	0,029146	0,029046	0,035176	0,056972	0,059266	0,057013	0,054369	0,051800	0,049561	0,047636
15	0,027492	0,040811	0,077681	0,077622	0,071939	0,066805	0,062357	0,058614	0,055528	0,053024
16	0,067337	0,131921	0,116679	0,100305	0,088847	0,080067	0,073312	0,068200	0,064254	0,061159
17	0,295883	0,192808	0,144006	0,117694	0,100582	0,088962	0,080798	0,074800	0,070265	0,066763
18	0,000660	0,001483	0,003398	0,003499	0,003330	0,003202	0,003045	0,002897	0,002775	0,002672
19	0,001518	0,003440	0,003121	0,002787	0,002591	0,002392	0,002230	0,002108	0,002008	0,001927
20	0,000091	0,000119	0,000200	0,000293	0,000306	0,000307	0,000308	0,000302	0,000295	0,000289
21	0,000121	0,000182	0,000229	0,000221	0,000217	0,000214	0,000207	0,000200	0,000195	0,000190
22	0,000015	0,000024	0,000027	0,000037	0,000045	0,000047	0,000049	0,000050	0,000051	0,000050
23	0,000046	0,000036	0,000037	0,000039	0,000039	0,000040	0,000040	0,000040	0,000040	0,000040

Tabela A.4: Probabilidades de ruína em horizonte finito - Carteira Fechada

Probabilidade de Ruína	Prémio Puro	Prémio Comercial	Escala de Norberg	Escala de Borgan et al	Escala de Gilde e Sundt
$\psi(\hat{u}, 1)$	0,027306	0,027306	0,027306	0,027306	0,027306
$\psi(\hat{u}, 2)$	0,027327	0,028555	0,028030	1	0,027567
$\psi(\hat{u}, 3)$	0,027327	0,060828	0,030655	1	0,027965
$\psi(\hat{u}, 4)$	0,027327	0,323331	0,092626	1	0,030987
$\psi(\hat{u}, 5)$	0,027327	0,865731	0,678886	1	0,056384
$\psi(\hat{u}, 6)$	0,027327	0,995988	0,989308	1	0,275201
$\psi(\hat{u}, 7)$	0,027327	1	1	1	0,814524
$\psi(\hat{u}, 8)$	0,027327	1	1	1	0,995034
$\psi(\hat{u}, 9)$	0,027327	1	1	1	1

Tabela A.5: Probabilidades de ruína em horizonte finito - Carteira Aberta

Probabilidade de Ruína	Prémio Puro	Prémio Comercial	Escala de Norberg	Escala de Borgan et al	Escala de Gilde e Sundt
$\psi(\hat{u}, 1)$	0,027306	0,999551	0,201536	0,087466	0,169340
$\psi(\hat{u}, 2)$	0,027327	1	0,223462	0,089459	0,185099
$\psi(\hat{u}, 3)$	0,027327	1	0,228555	0,089595	0,189089
$\psi(\hat{u}, 4)$	0,027327	1	0,230158	0,089837	0,189927
$\psi(\hat{u}, 5)$	0,027327	1	0,230886	0,089841	0,190306
$\psi(\hat{u}, 6)$	0,027327	1	0,231851	0,089841	0,190561
$\psi(\hat{u}, 7)$	0,027327	1	0,232153	0,089841	0,190662
$\psi(\hat{u}, 8)$	0,027327	1	0,232683	0,089841	0,190668
$\psi(\hat{u}, 9)$	0,027327	1	0,233108	0,089841	0,190668

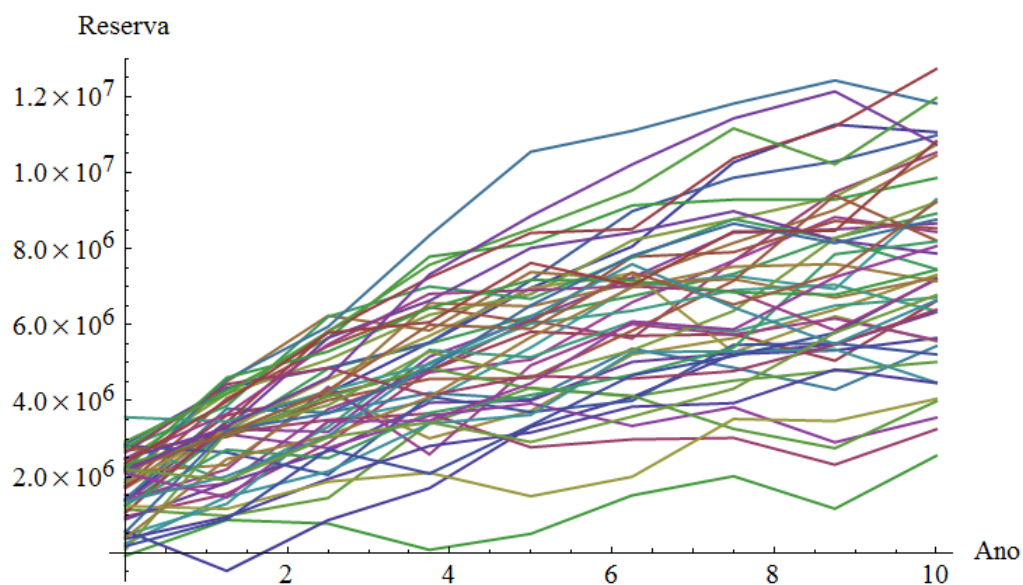


Figura A.1: Evolução da Reserva (para um total de 50 simulações das Indemnizações Agregadas) considerando a Escala de Norberg - Carteira Aberta

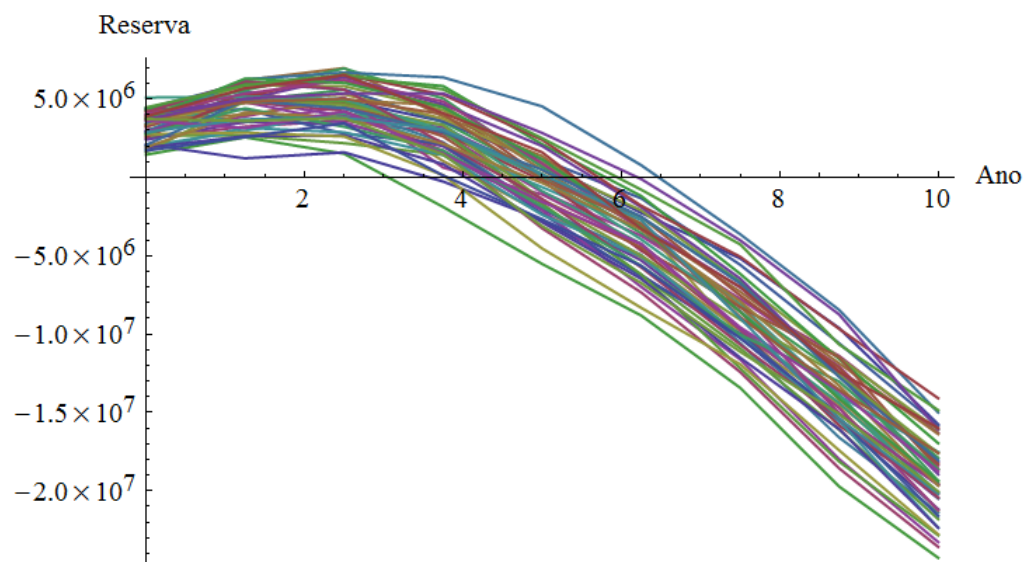


Figura A.2: Evolução da Reserva (para um total de 50 simulações das Indemnizações Agregadas) considerando a Escala de Norberg - Carteira Fechada

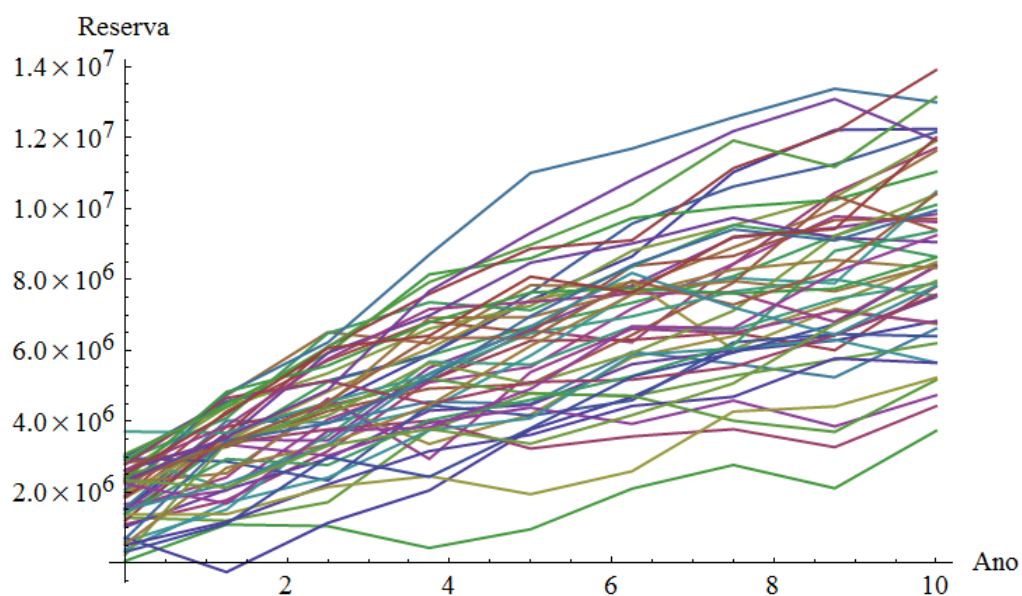


Figura A.3: Evolução da Reserva (para um total de 50 simulações das Indemnizações Agregadas) considerando a Escala de Gilde - Carteira Aberta

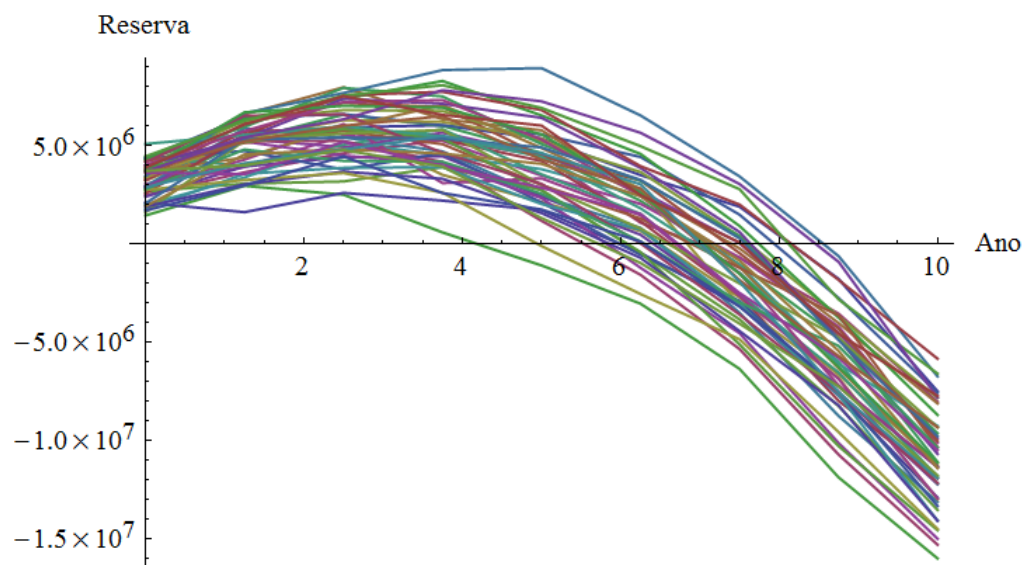


Figura A.4: Evolução da Reserva (para um total de 50 simulações das Indemnizações Agregadas) considerando a Escala de Gilde - Carteira Fechada

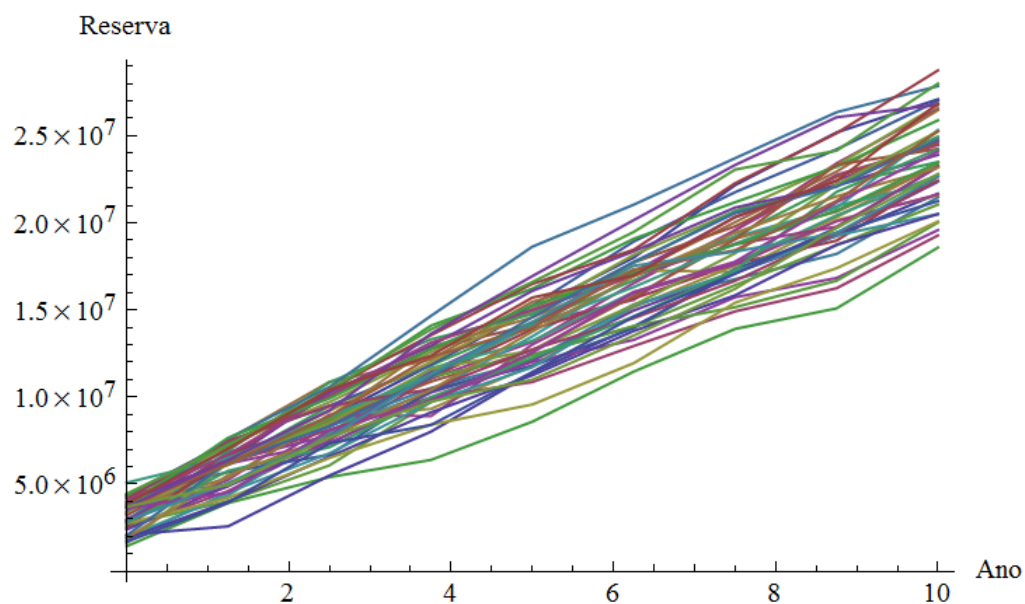


Figura A.5: Evolução da Reserva (para um total de 50 simulações das Indemnizações Agregadas) considerando o Prémio Puro